

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Redução de Ordem de Controladores, Formas Balanceadas e Fatorações Coprimas

por

André Hentz

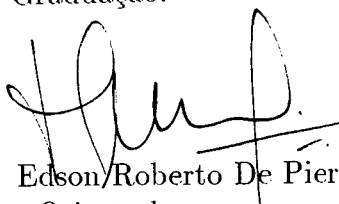
Dissertação apresentada à Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para obtenção do título de
Mestre em Engenharia Elétrica

02 de Maio de 1996

**Redução de ordem de controladores,
formas balanceadas e fatorações coprímicas**

André Hentz

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de **Mestre em Engenharia** na especialidade **Engenharia Elétrica**, área de concentração **Sistemas de Controle**, e aprovada em sua forma final pelo curso de Pós-Graduação.

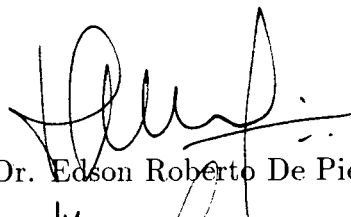


Prof. Dr. Edson Roberto De Pieri
Orientador

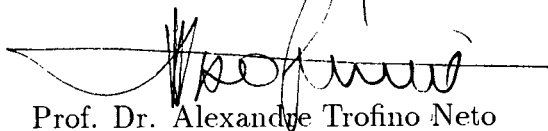


Prof. Dr. Enio Valmor Kassick
Coordenador do Curso de
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

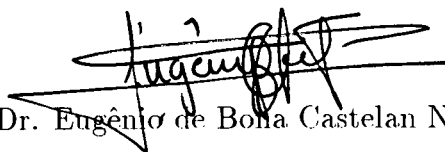
Banca Examinadora



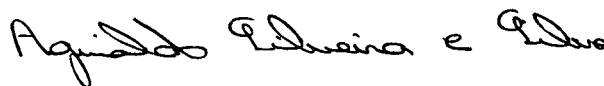
Prof. Dr. Edson Roberto De Pieri



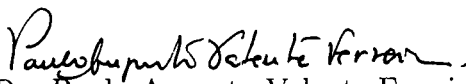
Prof. Dr. Alexandre Trofino Neto



Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto



Prof. Dr. Aguinaldo Silveira e Silva



Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira

à minha família

I've inserted a begin-math/end-math symbol since I think you left one out. Proceed, with fingers crossed.

I've inserted something that you may have forgotten. (See the < inserted text > above.) With luck, this will get me unwedged. But if you really didn't forget anything, try typing '2' now; then my insertion and my current dilemma will both disappear.

Sorry, I already gave what help I could... Maybe you should try asking a human? An error might have occurred before I noticed any problems. "If all else fails, read the instructions."

Agradecimentos

Em primeiro lugar, e acima de tudo, este trabalho deve-se ao meu diligente esforço e incansável persistência. Entretanto, como não poderia deixar de ser, devo agradecer a algumas pessoas que tornaram sua feitura mais fácil.

Ao Professor Edson Roberto De Pieri devo especial consideração pela sua dedicada orientação e seu respeito às minhas idéias. Devo-lhe também, e aos Professores Alexandre Trofino Neto e Carlos Alberto Maziero, agradecimentos pela amizade transparente.

Devo um agradecimento muito especial ao amigo César Augusto Rorato Crusius. Espero que ele tenha aprendido comigo ao menos metade do que aprendi com ele.

Finalmente, gostaria de agradecer às seguintes pessoas e instituições por colocarem, gratuitamente, o produto do seu trabalho à minha disposição. A Linus Torvalds e companhia pelo excelente sistema operacional *Linux*. Ao X Consortium, Inc. pelo *X Window System*. A Robert Nation pelo *FVWM* (Window Manager). A John E. Davis pelo editor *jed*. A Donald E. Knuth pelo *T_EX* e a Leslie Lamport pelo *L^AT_EX*. À Free Software Foundation pelo projeto *GNU*. Ao “Scilab group” do INRIA/França pelo *Scilab*. Aos autores do *dvips*, do *xdvi*, do *ghostscript*, do *xfig*, do *gnuplot*, do *dugt*, do ...

Eu certamente esqueci de citar alguém devido à minha limitada memória (minhas sinceras desculpas) ou porque o esquecido não merecia ser lembrado. Prevalença a opção que melhor convier.

Resumo

Esta dissertação estuda diversos métodos de redução de ordem de modelos e controladores. A maior parte dos métodos apresentados utiliza uma realização em variáveis de estado na qual a observabilidade e a controlabilidade de um dado estado são facilmente medidas. Aproximações ótimas no sentido da norma Hankel e fatorações coprimas são algumas das ferramentas usadas para tentar obter melhores resultados. Este trabalho conclui com a apresentação de um exemplo numérico. Um importante resultado é a obtenção de uma abordagem que generaliza três métodos conhecidos.

Abstract

This work presents a description of several methods for model and controller reduction. Most methods are based on a special set of coordinates, known as balanced realization, that provides a measure of observability and controllability of a given state. Also, Hankel norm approximations and coprime factorizations are some of the tools used in order to obtain good results. As an important achievement, three methods are shown to fit on the same framework. An example showing how the methods behave in a practical situation concludes the presentation.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Organização	2
1.2	Notação e convenções	4
2	A forma balanceada	8
2.1	Análise de componentes principais	9
2.2	Uma extensão da teoria das realizações mínimas	11
2.3	Definindo a forma balanceada	15
2.3.1	Algumas propriedades	16
2.4	Aproximando um sistema estável	18
2.4.1	Redução por eliminação de um subsistema	19
2.4.2	Usando perturbações singulares	20
2.4.3	Análise freqüencial	22
2.5	Aproximando um sistema instável	23
2.6	Extensões	24
3	O problema da aproximação via norma Hankel	26
3.1	A norma Hankel	27
3.2	Todas as soluções!	30
3.3	Uma classe de soluções e uma solução particular	34
3.4	Análise de erro	35

ÍNDICE	viii
3.5 Aproximando um sistema estável	38
3.5.1 Cálculo da transferência direta	40
3.6 Aproximando um sistema instável	42
4 Redução ponderada	44
4.1 A forma balanceada e as ponderações	45
4.2 Aproximações Hankel-ótimas com ponderação	50
4.3 Uma outra abordagem	52
4.4 Redução de controladores	53
4.5 Ponderações úteis	56
5 A abordagem por fatorações coprimas	58
5.1 Resultados preliminares	60
5.1.1 Estabilidade, performance e ponderações em frequência	62
5.2 Redução de modelos	69
5.2.1 Via balanceamento	71
5.2.2 Os casos \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 e redução balanceada ponderada	76
5.2.3 Via norma Hankel	78
5.3 Balanceamento: variações sobre um mesmo tema	83
6 Estudo de caso	87
6.1 O problema: Boeing 767	87
6.2 Redução de modelo	90
6.3 Redução de controlador	92
6.3.1 Resultados	97
7 Conclusão	104
A Outros métodos de redução	107
A.1 Métodos relacionados com LQG	107

<i>ÍNDICE</i>	ix
A.2 Um critério na norma \mathcal{L}_∞	109
A.3 Coordenadas de correlação	109
B Dados para o problema do Boeing	114

Lista de Figuras

1.1	Redução de controlador x redução de modelo	2
2.1	Diagrama para caracterização de S_c e S_o^\perp a partir da teoria de componentes principais	12
2.2	Elipsóides em um sistema não-balanceado	13
2.3	Elipsóides em um sistema balanceado	14
4.1	Sistema com ponderações de entrada e de saída	46
4.2	Sistema em malha fechada: Planta + Controlador	54
4.3	Sistema em malha fechada: Planta + Controlador Reduzido	54
4.4	Relação entre redução do controlador e redução ponderada	55
5.1	Diagrama padrão de realimentação	60
5.2	Três representações alternativas do controlador $K(s)$	63
5.3	Representações equivalentes usando <i>fatoração coprima pela esquerda</i>	64
5.4	Representações equivalentes usando <i>fatoração coprima pela direita</i>	65
5.5	Sistema em Malha Fechada	66
6.1	Configuração em malha fechada	90
6.2	Erro absoluto – modelo reduzido para ordem 27 com o método do truncamento da forma balanceada	93

6.3	Erro absoluto – modelo reduzido para ordem 27 com o método das perturbações singulares	94
6.4	Erro absoluto – modelo reduzido para ordem 27 com o método da aproximação Hankel-ótima	95
6.5	Fatores de Amortecimento	100
6.6	Norma da saída 8 normalizada	100
6.7	Norma da saída 10 normalizada	101
6.8	Norma da saída 1 normalizada – parte 1	102
6.9	Norma da saída 1 normalizada – parte 2	102
6.10	Norma da saída 2 normalizada – parte 1	103
6.11	Norma da saída 2 normalizada – parte 2	103

Lista de Tabelas

6.1	Pólos do modelo	88
6.2	Valores singulares da parte estável do modelo	91
6.3	Normas \mathcal{L}_∞ do erro absoluto para modelos reduzidos de ordem k .	92
6.4	Performance do controlador de ordem 55	97
6.5	Pontos de instabilidade	98

Capítulo 1

Introdução

Em diversas áreas, inúmeras situações apresentam sistemas cuja dimensão elevada torna sua manipulação uma tarefa bastante complicada. Sempre que este é o caso indaga-se se não seria mais produtivo trabalhar com um modelo menor e menos preciso mas que conduza mais facilmente aos resultados desejados. Nestas situações, geralmente, tal redução de ordem baseia-se em profundos conhecimentos sobre o sistema em questão e requer grande familiaridade com ele. O objetivo do estudo de técnicas de redução de modelos é encontrar métodos que dispensem tamanha familiaridade e cuja aplicação possa ser automatizada.

No processo de obtenção de um controlador para determinado sistema, modelagem, análise, projeto e implementação são etapas básicas. Dentro desta linha, a redução é chamada redução de modelos quando é aplicada logo após a modelagem ou redução de controladores quando se encaixa após o projeto. Do ponto de vista prático, esses dois tipos são bastante diferentes na medida em que para se reduzir um controlador deve-se considerar também a planta. Esta dissertação abordará os dois problemas, supondo que controlador e planta são sistemas lineares invariantes ao longo do tempo. Na figura 1.1 pode-se visualizar as diferenças entre estas duas abordagens e verificar que redução de modelos é um procedimento que pode ser

aplicado a controladores sem levar em conta a existência da planta. Quando se estuda redução de controladores, a influência da planta é de grande interesse.

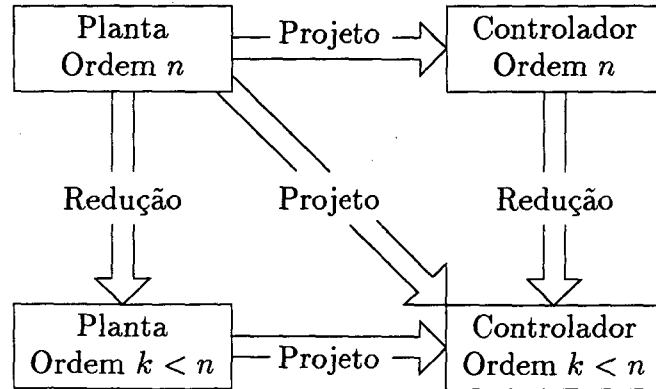


Figura 1.1: Redução de controlador x redução de modelo

São objetivos deste trabalho apresentar um conjunto coerente de métodos de redução e detalhar os mais importantes. Todavia, seria praticamente impossível abordar todos os métodos existentes, por mais importantes que fossem. Por isso, a fim de manter uma linha coesa durante todo o trabalho, somente serão estudados com a devida profundidade métodos que se baseiam na chamada forma balanceada (ref. [29]) ou que nela se inspiram. Recentemente, diversos trabalhos descrevem métodos que se assemelham aos aqui expostos. Tais trabalhos serão citados ao longo da dissertação e podem ser facilmente analisados com os fundamentos nela apresentados.

1.1 Organização

Métodos de redução de modelos existem na literatura há muito tempo ao contrário dos métodos de redução de controladores que somente apareceram com a evolução da teoria de controle. Neste trabalho, apenas métodos mais recentes serão estu-

dados, começando pela apresentação da forma balanceada e métodos diretamente ligados à ela, no capítulo 2. A forma balanceada busca determinar quais os estados que são simultaneamente menos controláveis e menos observáveis. Neste sentido os métodos do capítulo 2 lembram muito a teoria das realizações mínimas de Kalman.

Embora a norma \mathcal{L}_∞ seja a principal medida da qualidade de uma aproximação, é bastante difícil encontrar soluções que sejam ótimas neste sentido, por isso o método do capítulo 3 utiliza-se da norma Hankel (ref. [17]) para obter uma boa aproximação. O trabalho apresentado naquele capítulo conduz a uma aproximação que é ótima no sentido da norma Hankel e que apresenta bons resultados quando a norma \mathcal{L}_∞ é utilizada.

Assim como os métodos do capítulo 2, as aproximações Hankel-ótimas do capítulo 3 somente adequam-se, na forma apresentada, à redução de modelos. O capítulo 4 descreve uma engenhosa aplicação do *teorema do pequeno ganho* (ref. [15]) que permite aplicá-los para reduzir controladores. Antes, porém, introduz-se a redução de modelos com ponderações, uma ferramenta essencial à redução de controladores.

O capítulo 5 traz à discussão a teoria das fatorações coprimas. Com ela e com os resultados do capítulo 4 um novo método para redução de controladores é desenvolvido e prima por ser eficiente e simples, especialmente quando controladores LQG devem ser reduzidos. Ambas abordagens, via forma balanceada ou via norma Hankel, são contempladas por este método.

Em um processo de redução de sistemas é muito importante estabelecer qual critério definirá uma boa aproximação. Na prática, porém, apesar da norma \mathcal{L}_∞ ser universalmente adotada como determinante da qualidade de uma aproximação, são as características de cada sistema que definem qual método produzirá melhores resultados. Assim, dependendo do tipo de sistema ao qual são aplicados, os vários métodos apresentam resultados tão diferentes que é difícil compará-los. Mesmo

assim, a seção 6.1 aplica-os ao modelo da dinâmica vertical de um Boeing 767 (de ordem 55) a fim de exemplificar como estes métodos se assemelham ou se diferenciam em um caso particular. O capítulo 7 conclui a tese expondo alguns dos pontos fortes e fracos dos diversos métodos, além de analisar as perspectivas de continuação para o trabalho desenvolvido.

Para demonstrar a viabilidade de métodos que não utilizam a forma balanceada, o apêndice A introduz um método conhecido como C^4 . Outras perspectivas essencialmente diferentes da apresentada na parte principal da dissertação são ali descritas.

1.2 Notação e convenções

A maioria da notação empregada no decorrer da tese é padrão e muito será definido quando necessário. Deve-se, entretanto, definir alguma notação antes de começar. Por exemplo, o semiplano esquerdo aberto é denotado por \mathbb{C}^- e o semiplano direito aberto por \mathbb{C}^+ . Além disso, diz-se que uma matriz complexa é *Hurwitz* se ela possui todos os seus autovalores em \mathbb{C}^- . Assim, toda vez que se falar em estabilidade de uma realização em variáveis de estado se estará querendo significar que todos os pólos da matriz de dinâmica do sistema pertencem a \mathbb{C}^- .

Uma notação muito comum é escrever $\text{diag}\{a, b, \dots, z\}$ para identificar a matriz diagonal cujos elementos são a, b, \dots, z . Para representar um sistema linear invariante no tempo com uma realização em variáveis de estado dada por

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du.$$

utiliza-se o quarteto de matrizes (A, B, C, D) . Quando for necessário relacionar

a realização com a matriz de funções de transferência de um sistema utilizar-se-á

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right]$$

ou, explicitamente,

$$G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$$

Ao escrever (A, B, C) , omitindo a matriz D , indica-se que $D = 0$ e diz-se que o sistema é estritamente próprio.

Supondo que para um sistema dado por $G(s)$ seja possível encontrar $G^{-1}(s)$ tal que

$$G(s)G^{-1}(s) = I,$$

diz-se que $G(s)$ é bipróprio se tanto $G(s)$ quanto $G^{-1}(s)$ são próprios. No caso escalar $G(s)$ e $G^{-1}(s)$ teriam o mesmo número de pólos e zeros. Para facilitar o entendimento do significado de $G^{-1}(s)$ o seguinte resultado (ver [9]) é útil. Seja G dado por

$$G = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

então, G^{-1} é dado por

$$G^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A - BD^{-1}C & -BD^{-1} \\ \hline D^{-1}C & D^{-1} \end{array} \right]$$

e $GG^{-1} = I$.

O espaço \mathcal{L}_∞ é o espaço de Banach definido para matrizes de funções de transferência no eixo imaginário. Assim, \mathcal{L}_∞ é a modificação do correspondente espaço de Lebesgue L_∞ tal que, para qualquer matriz $G(j\omega)$ pertencente a \mathcal{L}_∞ , a seguinte norma está definida

$$\|G(j\omega)\|_\infty \triangleq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega))$$

Na equação acima, $\bar{\sigma}(M)$ denota o maior valor singular da matriz complexa M . Algumas vezes abusa-se da notação ao escrever $\|G(s)\|_\infty$ querendo significar que s deve ser substituído por $j\omega$. Os espaços de Hardy \mathcal{H}_∞^+ e \mathcal{H}_∞^- são os subespaços de \mathcal{L}_∞ que compreendem as funções de transferência cujos pólos estão todos em \mathbb{C}^- ou \mathbb{C}^+ , respectivamente. A razão para a estranha utilização dos sinais é que \mathcal{H}_∞^+ é o espaço das funções analíticas em \mathbb{C}^+ . Pode-se utilizar [17] ou [9] como referências para este tema.

Diversas vezes esta tese referenciará o conhecido método LQG para projeto de controladores lineares. Entretanto, várias notações diferentes existem para descrevê-lo. Aqui adota-se a seguinte. Seja o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + B_N w \\ y &= Cx + v \\ z &= C_P x\end{aligned}$$

onde v e w são ruídos gaussianos com média zero e matrizes de covariância V e W respectivamente e z é a saída que define o desempenho do sistema. O controlador é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= (A - BF - LC)x_c + Ly \\ u &= -Fx\end{aligned}$$

onde F e L satisfazem

$$\begin{aligned}A^T X + XA - XBR^{-1}B^T X + C_P^T Q C_P &= 0 \\ F &= R^{-1}B^T X\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}AY + YA^T - YC^T V^{-1}CY + B_N W B_N^T &= 0 \\ L &= YC^T V^{-1}\end{aligned}$$

Note-se que sempre será assumido que controlador e planta encontram-se em configuração de realimentação *positiva*, por isso o ganho negativo do controlador.

Algumas vezes utilizar-se-á o subscrito “ p ” para denotar matrizes referentes à planta e deve-se, portanto, ter especial cuidado para não confundir C_p e C_P .

Capítulo 2

A forma balanceada

É de essencial importância ao processo de redução de modelos que exista alguma medida da influência das diversas componentes do sistema. Quando se trata o sistema através de seu modelo em equações de estado é natural que a base do espaço escolhida para tal representação evidencie determinadas características do sistema. A busca de uma base que explicita o peso de cada estado na relação entrada-saída constitui o objetivo do método exposto por Moore (ref. [29]).

Apesar de ter aplicação direta em redução de modelos, a apresentação de [29] não está limitada unicamente a este contexto pois serve de base para a análise de outros problemas, entre eles o da aproximação na norma de Hankel apresentado no capítulo 3. Além disso, Moore também apresenta uma interessante interpretação geométrica para os gramianos de um sistema.

O desenvolvimento deste capítulo faz-se através da decomposição da matriz de resposta impulsiva de um sistema em componentes principais. Em seguida, as magnitudes das componentes principais são apresentadas como medidas da controlabilidade e da observabilidade de determinadas regiões do espaço de estados o que fornece uma clara extensão da teoria das realizações mínimas de Kalman. É esta extensão que justifica a existência da chamada forma balanceada, um sistema

de coordenadas no qual os níveis de controlabilidade e observabilidade de um dado estado são iguais. O foco das atenções então se volta para algumas propriedades da representação internamente balanceada e, na seção 2.4, dois métodos de redução de sistemas estáveis são apresentados acompanhados de uma breve análise freqüencial. Finalmente, introduz-se um pequeno procedimento para aproximação de sistemas instáveis.

Embora a determinação numérica da forma balanceada não seja o objetivo deste trabalho, vale a pena destacar os trabalhos de Laub *et al.* (ref. [25]) e Safonov e Chiang (ref. [34]) ao desenvolver métodos numericamente eficientes.

2.1 Análise de componentes principais

As componentes principais constituem uma interessante construção matemática que serve como motivação para o desenvolvimento da técnica das realizações balanceadas. Segundo esta metodologia, qualquer mapa contínuo $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, representado pela matriz $F(t)$ e definido no intervalo $t \in [t_1, t_2]$, possui um gramiano definido por:

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} F(t)F(t)^T dt.$$

A matriz $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é semi-definida positiva e, como tal, possui uma decomposição autovalor-autovetor dada por:

$$W = V\Sigma V^T \tag{2.1}$$

onde:

$$\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$$

$$V^T V = I, \quad V = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n].$$

Com base nesta decomposição, $F(t)$ pode ser representada por:

$$F(t) = v_1 f_1(t)^T + v_2 f_2(t)^T + \dots + v_n f_n(t)^T$$

onde, sendo i um elemento de $\{1, 2, \dots, n\}$, $f_i(t) \triangleq F^T(t)v_i$ é chamada função componente principal, v_i é um vetor componente, $\sqrt{\sigma_i}$, uma magnitude componente e $v_i f_i(t)^T$ uma componente principal. Note-se que f_i pode ser encarada como sendo um vetor de funções.

Quando aplicada especificamente à matriz de resposta impulsiva de um sistema linear, a decomposição em componentes principais revela uma estreita ligação com a teoria das realizações mínimas de Kalman. O teorema que se segue representa o primeiro passo nesta direção.

Teorema 2.1 ([29]) *Seja $F(t)$ uma matriz de resposta impulsiva, linear e invariante no tempo definida no intervalo $[0, T_f]$, e seja W o seu grammiano com a decomposição dada pela equação 2.1. Definam-se S_c e S_o^\perp , os conjuntos de estados muito controláveis e pouco observáveis por*

$$\begin{aligned} S_c &\triangleq \{x(t_1) : x(t_1) = \int_0^{t_1} F(t_1 - \tau)u(\tau) d\tau, \\ &\quad \|u(t)\|_2 \leq 1, t_1 < T_f, x(0) = 0\} \\ S_o^\perp &\triangleq \{x(0) : y(t_1) = \int_0^{t_1} F^T(t_1 - \tau)x(0)\delta(\tau) d\tau, \\ &\quad \|y(t)\|_2 \leq 1, t_1 < T_f, u(t) = 0\}. \end{aligned}$$

Então,

1. A superfície de S_c é um elipsóide com semi-eixos iguais a $\sqrt{\sigma_i}v_i$ com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
2. A superfície de S_o^\perp é um elipsóide com semi-eixos iguais a $\frac{1}{\sqrt{\sigma_i}}v_i$ com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Prova. Seguindo a linha de [29], só a parte 2 será provada por ser mais simples. Portanto, seja o elipsóide

$$\hat{S}_o^\perp = \{\hat{x} : \exists p, \hat{x} = V\Sigma^{-\frac{1}{2}}p \text{ e } \|p\|_2 = 1\}$$

onde V e Σ são dados na equação 2.1.

Supondo que $x(0) = \hat{x} \in \hat{S}_o^\perp$ tem-se

$$\begin{aligned} y(t_1) &= \int_0^{t_1} F^T(t_1 - \tau) x(0) \delta(\tau) d\tau \\ &= F^T(t_1) x(0) = F^T(t_1) \hat{x}. \end{aligned}$$

Então, calcula-se a norma de y no intervalo $[0, T_f]$:

$$\begin{aligned} \|y\|_2^2 &= \int_0^{T_f} \hat{x}^T F(\tau) F^T(\tau) \hat{x} d\tau \\ &= \hat{x}^T \int_0^{T_f} F(\tau) F^T(\tau) d\tau \hat{x} \\ &= \hat{x}^T W \hat{x} = p^T \Sigma^{-\frac{1}{2}} V^T \cdot V \Sigma V^T \cdot V \Sigma^{-\frac{1}{2}} p = p^T p = 1 \end{aligned}$$

Dai, conclui-se que $\hat{S}_o^\perp \subseteq S_o^\perp$. Sendo todos os σ_i menores que infinito o elipsóide ocupa em espaço de dimensão n e não degenera para um subespaço de menor dimensão. Aplicando propriedades da linearidade pode-se tomar qualquer estado que esteja fora do elipsóide e mostrar que a saída produzida é de norma menor que a unidade. ■

2.2 Uma extensão da teoria das realizações mínimas

Tendo dado os passos iniciais, pode-se agora relacionar as componentes principais com os subespaços de controlabilidade X_c e de não-observabilidade X_o^\perp de um sistema dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{2.2}$$

Considere-se o sistema da figura 2.1a para fins de análise do subespaço controlável X_c . Sendo $F(t)$ igual a $e^{At}B$, pode-se aplicar o teorema 2.1 para caracterizar o conjunto $S_c \subset X_c$ que fornece informações mais detalhadas sobre a estrutura

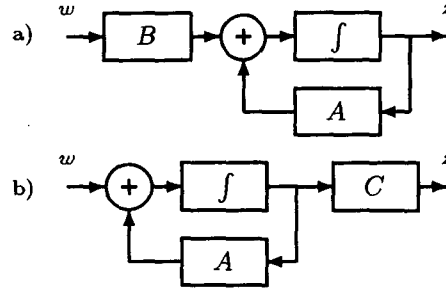


Figura 2.1: Diagrama para caracterização de S_c e S_o^\perp a partir da teoria de componentes principais

de X_c . A partir do teorema 2.1, S_c pode ser interpretado como a distribuição energética em X_c . Assim, um pequeno valor de σ_i significa que a quantidade de energia na direção v_i é pequena ou, em outras palavras, a energia da entrada necessária para alcançar um estado que está na direção v_i é grande se comparada àquela requerida para um estado de mesma norma mas em outra direção v_j cujo σ_j é grande.

Raciocínio semelhante aplicado a figura 2.1b conduz à conclusão de que o conjunto S_o^\perp é caracterizado com base no teorema 2.1 usando $F(t) = e^{A^T t} C^T$.

Antes de estabelecer uma representação de estados baseada nos conceitos apresentados até aqui é importante resumir esta seção e apresentar alguns pontos que dizem respeito à característica de entrada e saída de uma determinada representação.

O primeiro ponto digno de nota é a interpretação geométrica dos conjuntos S_c e S_o^\perp . Enquanto em S_c os semi-eixos (dispostos em ordem decrescente) da elipse que o contém são:

$$\sqrt{\sigma_{c1}} v_{c1}, \sqrt{\sigma_{c2}} v_{c2}, \dots, \sqrt{\sigma_{cn}} v_{cn}$$

em S_o^\perp eles são:

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma_{on}}} v_{on}, \frac{1}{\sqrt{\sigma_{on-1}}} v_{on-1}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\sigma_{o1}}} v_{o1}$$

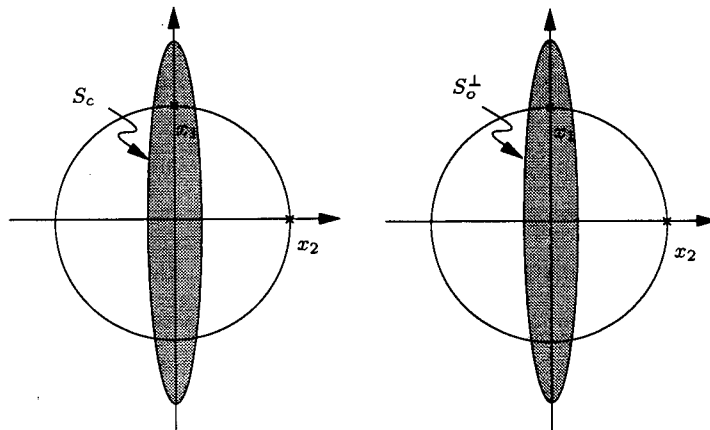


Figura 2.2: Elipsóides em um sistema não-balanceado

Na figura 2.2 tem-se um sistema representado por uma realização outra que não a balanceada. Ao comparar estados de mesma norma mas em direções ortogonais (x_1 e x_2) verifica-se que x_1 é mais controlável que x_2 mas menos observável. Ao colocar-se este sistema na sua realização balanceada (figura 2.3) os “graus” de controlabilidade e observabilidade de cada estado se igualam. Mais simplesmente, nota-se a partir da figura que todos os estados no eixo horizontal, por exemplo \bar{x}_2 , são mais observáveis e mais controláveis que seus correspondentes de mesma norma no eixo vertical. Assim, estados no eixo vertical tendem a não influenciar na característica de entrada e saída do sistema.

Uma medida interessante dos “graus” de controlabilidade e observabilidade são $\mu_c^2 \triangleq \frac{\sigma_{c1}}{\sigma_{cn}}$ e $\mu_o^2 \triangleq \frac{\sigma_{o1}}{\sigma_{on}}$. Seria portanto razoável tratar pequenos valores de σ_i como sendo zero, o que conduziria a uma realização mínima no sentido de Kalman. No entanto, como mostrou a discussão anterior, tanto as magnitudes componentes $\sqrt{\sigma_i}$ quanto os vetores principais v_i são dependentes do conjunto de coordenadas escolhido o que inibe esta tendência inicial. Um pequeno exemplo numérico expõe mais claramente essa dependência e aponta a necessidade de procurar uma representação que minimize o desbalanço entre observabilidade e controlabilidade de

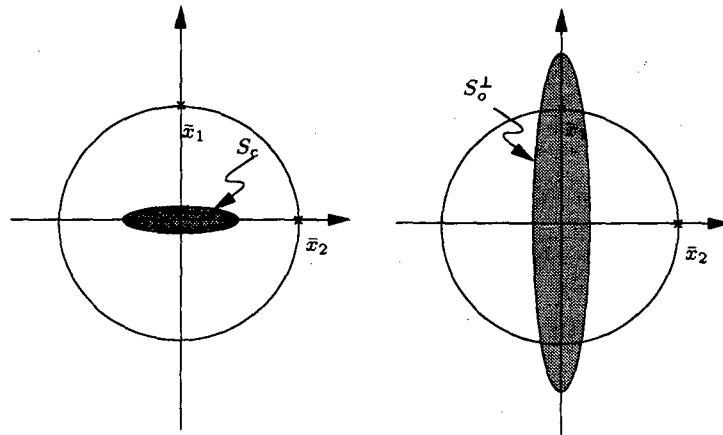


Figura 2.3: Elipsóides em um sistema balanceado

cada estado.

Considere-se o modelo apresentado por Moore (ref. [29]):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10^{-6} \\ 10^6 \end{bmatrix} u$$

$$y = [10^6 \quad 10^{-6}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Apesar deste sistema possuir $\mu_c \approx \mu_o \approx 10^{12}$, isto significa apenas um desbalanço entre as coordenadas que se reflete em elipsóides extremamente distorcidos. Se o sistema for reescrito com $\hat{x}_1 = 10^6 x_1$ e $\hat{x}_2 = 10^{-6} x_2$, a nova representação passa a ter $\mu_c = \mu_o \approx 6.2$. Neste sentido, μ_c e μ_o agem, respectivamente como números de condição com respeito ao controle dos estados e à sua observação com entrada nula e o exemplo sugere a necessidade de se buscar uma representação privilegiada que permita compensar eventuais distorções. A próxima seção tratará de apresentar uma representação que possui uma característica notável: μ_c e μ_o são mínimos e iguais.

2.3 Definindo a forma balanceada

Além de apresentar a forma balanceada de um sistema linear, esta seção introduz algumas definições que são úteis para uniformizar a notação e a terminologia.

Seja o sistema da equação 2.2 analisado no intervalo de tempo $[0, T_f]$.

Definição 2.2 O *grammiano de controlabilidade*, $P(0, T_f)$, e o *grammiano de observabilidade*, $Q(0, T_f)$, são definidos como

$$P(0, T_f) \triangleq \int_0^{T_f} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$$

e

$$Q(0, T_f) \triangleq \int_0^{T_f} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt.$$

Se o sistema 2.2 for estável a definição valerá para qualquer intervalo de tempo, particularmente para $t \in [0, \infty]$ quando os grammianos são denotados simplesmente por P e Q . Neste caso P e Q satisfazem as seguintes equações de Lyapunov:

$$AP + PA^T + BB^T = 0 \quad (2.3)$$

$$A^T Q + QA + C^T C = 0 \quad (2.4)$$

Como as raízes quadradas autovalores de PQ são extremamente importantes na teoria das realizações balanceadas, e até mesmo no tratamento dado por Glover (ref. [17]) ao problema da redução de modelos, elas recebem uma denominação própria. Enquanto em Moore (ref. [29]) elas são os *Modos de Segunda Ordem*, um termo derivado de um contexto relativo a filtros digitais, na teoria de controle um termo mais apropriado é aquele utilizado por Glover e apresentado na definição que segue.

Definição 2.3 Valores Singulares Hankel são as raízes quadradas dos autovalores do produto, PQ , das soluções das equações 2.3 e 2.4. Ou seja, $\forall i, \sigma_i \triangleq \sqrt{\lambda_i(PQ)}$.

Este termo advém do fato de que as raízes quadradas dos autovalores de PQ são os valores singulares da matriz Hankel (ver seção 3.1) do sistema discreto correspondente ao modelo dado pela equação 2.2 (ver também [29], [17]).

É tempo de apresentar a pequena definição que, não obstante, foi responsável pelo salto qualitativo dado no tratamento do problema da redução de modelo nos anos 80.

Definição 2.4 *O modelo 2.2 é internamente balanceado, ou está na forma balanceada, se*

$$P = Q = \Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}.$$

Note-se que a convenção habitual é que os valores singulares sejam ordenados em ordem decrescente. Quando não for este o caso, explicitamente se dirá. A forma internamente balanceada, também chamada simplesmente de forma balanceada, foi estudada por diversos pesquisadores que dela derivaram vários métodos de redução ([29], [17], [27], [39], [23], [33], [44]). A partir dela, em conjunção com [25], derivou-se a idéia de que diagonalizando simultaneamente duas matrizes com determinadas interpretações físicas alcançar-se-iam características desejáveis para redução de modelos ([22], [30]).

2.3.1 Algumas propriedades

Vários resultados referentes às propriedades das formas balanceadas distribuem-se, com mais ou menos generalidade, em diversos trabalhos. As principais propriedades, colhidas especialmente em [17], [33] e [29], são o objetivo desta seção e apresentam-se em sua forma mais específica ao problema da redução de modelo. Afirmções aplicáveis a casos mais gerais podem ser encontradas na literatura citada.

Dois pontos para os quais justificada atenção inevitavelmente se volta são a existência e a unicidade das representações internamente balanceadas. Os seguin-

tes lemas respondem estas questões.

Lema 2.5 (Existência) *Qualquer que seja o modelo (A, B, C) , desde que estável, existe T tal que $(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT)$ possui grammianos dados por*

$$P = \text{diag}\{\Sigma_a, \Sigma_b, 0, 0\}$$

e

$$Q = \text{diag}\{\Sigma_a, 0, \Sigma_c, 0\}$$

com Σ_a , Σ_b e Σ_c definidas positivas e diagonais.

Deve-se notar que, se P_o e Q_o são os grammianos da realização original, os grammianos após a aplicação de T são

$$\begin{aligned} P &= T^{-1}P_oT^{-T} \\ Q &= T^TQ_oT. \end{aligned}$$

Quando o sistema for controlável e observável P e Q serão ambos iguais a Σ_a . Para simplificar a notação neste caso, dir-se-á que $P = Q = \Sigma$ e T pode ser encontrada do seguinte modo. Primeiro, encontram-se os fatores de Cholesky de P e Q :

$$\begin{aligned} P &= L_P L_P^T \\ Q &= L_Q L_Q^T \end{aligned}$$

e a decomposição em valores singulares

$$L_Q^T L_P = U \Lambda V^T.$$

A matriz T é dada por

$$T = L_P V \Lambda^{-\frac{1}{2}}.$$

Uma descrição mais detalhada de como isso funciona pode ser encontrada em [25] e [9].

Lema 2.6 (Unicidade) *Supondo um modelo (A, B, C) que seja estável, completamente controlável e completamente observável, ele possui uma representação internamente balanceada (com $P = Q = \Sigma$) que é única a menos de uma transformação ortogonal arbitrária T que satisfaça $T\Sigma = \Sigma T$. Se os σ_i forem distintos, T será uma matriz diagonal cujos elementos são $+1$ ou -1 .*

O particionamento do sistema (A, B, C) segundo a partição dos gramianos $\Sigma = \text{diag}\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ coloca a seguinte questão: o que é possível estabelecer sobre os subsistemas de um sistema balanceado? Seja então o sistema (A, B, C) estável, controlável, observável e internamente balanceado com o particionamento:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y &= [C_1 \ C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Du \end{aligned} \quad (2.5)$$

Assim, os seguintes lemas dispõem sobre as propriedades dos subsistemas.

Lema 2.7 (Estabilidade) *Se Σ_1 e Σ_2 não têm elementos diagonais comuns então (A_{11}, B_1, C_1) e (A_{22}, B_2, C_2) são estáveis.*

Lema 2.8 (Controlabilidade e Observabilidade) *Os dois subsistemas (A_{11}, B_1, C_1) e (A_{22}, B_2, C_2) são controláveis e observáveis.*

Lema 2.9 (Balanceamento) *Os subsistemas (A_{11}, B_1, C_1) e (A_{22}, B_2, C_2) estão em sua forma balanceada.*

2.4 Aproximando um sistema estável

Um ponto visivelmente fraco da teoria da redução de modelos baseada na forma balanceada é que não é possível encontrar uma representação desse tipo que seja válida para qualquer instante de tempo se o sistema não for assintoticamente estável. Por enquanto toda a atenção estará fixada no caso de sistemas estáveis e

mínimos para os quais tanto P quanto Q são matrizes definidas positivas e satisfazem as equações de Lyapunov (eq. 2.3 e 2.4). Posteriormente algumas maneiras de solucionar o problema no caso de sistema instáveis também serão abordadas. Note-se, no entanto, que a restrição de definição positiva sobre as matrizes P e Q pode ser relaxada tendo em vista, primeiro, que o método apresentado em [17] para obtenção da forma balanceada é aplicável para sistemas não-mínimos. Segundo, mesmo que tal método não estivesse disponível, é possível encontrar uma realização mínima e, então, balanceá-la.

É inegável que a forma balanceada apresenta características que são, pelo menos, bastante interessantes. Entretanto, de que forma ela pode ser usada no problema da redução de modelo, apesar de intuitivamente claro, é uma questão a responder. Na verdade, a resposta intuitiva foi dada no trabalho pioneiro de Moore e consiste em eliminar os estados correspondentes aos menores valores singulares Hankel. Embora poucas justificativas matemáticas tenham sido apresentadas, Glover (ref. [17]) e Enns (ref. [16]) mostraram que existe um limitante superior para o erro em frequência.

Uma outra solução menos óbvia foi desenvolvida por Fernando e Nicholson (ref. [39]) inspirada na teoria das perturbações singulares. Neste caso, porém, o limitante obtido para o erro é maior.

2.4.1 Redução por eliminação de um subsistema

Considerando que o sistema particionado 2.5 corresponde a um grammiano ordenado (ou seja, $\sigma_i \geq \sigma_{i+1}$) e que $A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, Moore mostrou (ver ref. [33]) que:

$$\frac{\int_0^\tau \|u_2\|_2^2 dt}{\int_0^\tau \|u_1\|_2^2 dt} \geq \sqrt{\frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}}} \frac{\|x_2(\tau)\|_2}{\|x_1(\tau)\|_2},$$

onde u_1 e u_2 são as funções de menor norma \mathcal{L}_2 que levam os estados desde a origem até $[x_1^T(\tau) \ 0]^T$ e $[0 \ x_2^T(\tau)]^T$, respectivamente, no intervalo $[0, \tau]$.

Se $\sqrt{\sigma_k} \gg \sqrt{\sigma_{k+1}}$ e $\|u_1\| = \|u_2\|$ então:

$$\|x_2(\tau)\| \ll \|x_1(\tau)\|$$

De forma análoga, definindo y_1 e y_2 como as resposta no intervalo $[0, \tau]$ aos estados $[x_1^T(0) \ 0]^T$ e $[0 \ x_2^T(0)]^T$ para entrada nula, tem-se:

$$\int_0^\tau \|y_2\|^2 dt \ll \int_0^\tau \|y_1\|^2 dt$$

se $\sqrt{\sigma_k} \gg \sqrt{\sigma_{k+1}}$ e $\|x_1(0)\| = \|x_2(0)\|$.

Em outras palavras, os estados x_2 são muito menos afetados pelas entradas e exercem muito menos influências na saída que os estados x_1 . Isso sugere que, com $\sqrt{\sigma_k} \gg \sqrt{\sigma_{k+1}}$, os estados x_2 não afetam a característica de entrada e saída do sistema e podem ser ignorados e que o subsistema (A_{11}, B_1, C_1) seria uma boa aproximação do sistema 2.2. Na verdade exige-se um pouco mais para uma boa aproximação pois o erro cometido é proporcional à soma dos valores singulares correspondentes ao estados eliminados, como se verá mais adiante.

2.4.2 Usando perturbações singulares

Uma derivação do método apresentado na subsecção anterior utiliza-se da conhecida teoria das perturbações singulares. Esta teoria apresentou-se por muito tempo, e ainda apresenta-se, como uma ferramenta muito útil no contexto da teoria de controle. Como apresentado em [35], inúmeros problemas apresentam características de sistemas singularmente perturbados.

Simplificadamente, sistemas singularmente perturbados são sistemas cuja dimensão reduz-se quando pequenos parâmetros são tomados como nulos. Conforme [35] e [32], tais parâmetros são evidenciados na representação do sistema pela introdução de uma constante ε da seguinte maneira. Considere-se o sistema linear e invariante no tempo descrito pela equação 2.5.

Se $\|x_1\| \gg \|x_2\|$, pode-se introduzir um terceiro vetor de estado z tal que $x_2 = \varepsilon z$ com ε ajustado para que $\|x_1\| \approx \|\dot{z}\|$. Conclui-se que ε é um valor

pequeno e, fazendo-se as devidas substituições, o sistema passa a ser representado por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \varepsilon \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & \varepsilon A_{12} \\ A_{21} & \varepsilon A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y &= [C_1 \quad \varepsilon C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ z \end{bmatrix} + Du \end{aligned}$$

Segundo a teoria das perturbações singulares, o sistema chamado ‘lento’ é obtido fazendo $\varepsilon \dot{z} = 0$. Desse modo,

$$\begin{aligned} 0 &= A_{21}x_1 + \varepsilon A_{22}z + B_2u \\ z &= -\frac{1}{\varepsilon}A_{22}^{-1}(A_{21}x_1 + B_2u) \end{aligned}$$

com a inversibilidade de A_{22} sendo uma hipótese. Daí, a representação do sistema reduz-se a

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \bar{A}x_1 + \bar{B}u \\ y &= \bar{C}x_1 + \bar{D}u \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \\ \bar{B} &= B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2 \\ \bar{C} &= C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21} \\ \bar{D} &= D - C_2A_{22}^{-1}B_2 \end{aligned}$$

Neste caso, tem-se o seguinte resultado (ver [27]).

Lema 2.10 *Seja um sistema estável dado pela equação 2.5. Assume-se que esta é uma representação mínima e balanceada com grammianos ordenados. Supõe-se que as partições dos grammianos correspondentes a x_1 e x_2 , denotadas por Σ_1 e Σ_2 , não possuem elementos diagonais em comum. Sob estas condições o modelo reduzido da equação 2.6 é estável, controlável, observável e balanceado com grammiano igual a Σ_1 .*

Algumas vezes a realização original não permite dizer se um sistema pode ser singularmente perturbado. A utilização da forma balanceada como instrumento para evidenciar características de sistemas singularmente perturbados foi inicialmente proposta por Vicenza Fernando e Nicholson em [39]. Na seção seguinte será mostrado que, embora não possua a propriedade $\|x_1\| \gg \|x_2\|$, um sistema na forma balanceada pode ser reduzido utilizando-se este procedimento de modo a obter uma boa aproximação.

2.4.3 Análise freqüencial

Uma das principais razões para utilizar os métodos descritos acima reside no fato de que se pode, *a priori*, estimar o erro decorrente do processo de redução e escolher a melhor ordem para o modelo reduzido. Os limitantes dos erros em freqüência para cada um dos métodos descritos são apresentados nesta seção.

Normalmente a norma \mathcal{L}_∞ do erro absoluto ($\|G(s) - G_r(s)\|_\infty$) é utilizada para medir a qualidade de um modelo reduzido. No entanto, outras medidas são possíveis como, por exemplo, a norma do erro relativo (ref. [45] e [20]). No decorrer deste trabalho somente a norma \mathcal{L}_∞ será utilizada.

Para definir os limitantes do erro absoluto, denote-se por $C(sI - A)^{-1}B + D$ a função de transferência do sistema original e por $C_1(sI - A_{11})^{-1}B_1 + D_1$ a do sistema reduzido. Seja Σ_2 o grammiano do sistema (A_{22}, B_2, C_2) . Para o caso do truncamento da forma balanceada tem-se ([16], [17]) que

$$\begin{aligned} \|C(sI - A)^{-1}B + D - C_1(sI - A_{11})^{-1}B_1 - D_1\|_\infty &= \\ \|C(sI - A)^{-1}B - C_1(sI - A_{11})^{-1}B_1\|_\infty &\leq 2\text{tr}(\Sigma_2). \end{aligned}$$

Já no caso da aplicação da teoria das perturbações singulares aparecem algumas sutilezas. Em geral $D = 0$ e espera-se de um modelo reduzido que mantenha esta característica, ou seja, que tenha $D_1 = 0$. Todavia este não é exatamente o caso aqui e, portanto, tem-se dois resultados ambos encontrados em [27]. Enquanto

no caso geral

$$\|C(sI - A)^{-1}B + D - C_1(sI - A_{11})^{-1}B_1 - D_1\|_\infty \leq 2\text{tr}(\Sigma_2),$$

no caso em que D_1 é forçada a ser nula

$$\|C(sI - A)^{-1}B - C_1(sI - A_{11})^{-1}B_1\|_\infty \leq 4\text{tr}(\Sigma_2).$$

O último ponto digno de nota é que o método do truncamento da forma balanceada produz os maiores erros em baixas frequências onde o método das perturbações singulares conduz a erros menores (ref. [27]). Em altas frequências este comportamento altera-se: o erro obtido truncando a forma balanceada diminui enquanto o referente a utilização da técnica das perturbações singulares aumenta.

2.5 Aproximando um sistema instável

Até o momento uma suposição foi crucial para a obtenção da forma balanceada: o sistema deve ser estável. Frequentemente, no entanto, o objeto dos esforços de controle é um sistema instável, com grammianos infinitos. A consequência imediata é que os métodos de balanceamento não podem ser aplicados diretamente.

Para contornar essa dificuldade, pode-se decompor $G(s)$, a função de transferência a ser aproximada, de forma aditiva, efetuando-se a bloco-diagonalização da matriz de dinâmica (ver referências [17] e [32]). Ou seja, supondo uma realização de $G(s)$ em variáveis de estado dada pelo quarteto de matrizes (A, B, C, D) , encontra-se a forma ordenada de Schur de A

$$U'AU = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}$$

sendo que U é ortogonal, os autovalores de \hat{A}_{11} são todos negativos e os de \hat{A}_{22} , positivos ou nulos.

Em seguida, constrói-se

$$T = \begin{bmatrix} I & -K \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

com K obtida solucionando-se

$$-\hat{A}_{11}K + K\hat{A}_{22} + \hat{A}_{12} = 0.$$

Aplicando a transformação $\hat{x} = UTx$ obtém-se

$$\begin{aligned} G(s) &= D + C(sI - A)^{-1}B \\ &= D + \hat{C}_1(sI - \hat{A}_{11})^{-1}\hat{B}_1 \\ &\quad + \hat{C}_2(sI - \hat{A}_{22})^{-1}\hat{B}_2 \\ &= G_1(s) + G_2(s). \end{aligned}$$

com $\hat{B}_1, \hat{B}_2, \hat{C}_1, \hat{C}_2$ representando as devidas partições das matrizes B e C após a transformação.

Sobre $G_1(s)$ aplica-se um dos métodos descritos neste capítulo para obter $\hat{G}_1(s)$. Este procedimento satisfaz

$$\|G_1(s) - \hat{G}_1(s)\|_\infty \leq \alpha \text{tr}(\Sigma_2) \quad \text{para } \alpha = 2 \text{ ou } \alpha = 4.$$

onde α depende do método utilizado.

Monta-se então $\hat{G}(s)$, a aproximação procurada, como $\hat{G}(s) = \hat{G}_1(s) + G_2(s)$. O erro envolvido no processo é

$$\|\hat{G}(s) - G(s)\|_\infty = \|\hat{G}_1(s) - G_1(s)\|_\infty \leq \alpha \text{tr}(\Sigma_2).$$

2.6 Extensões

Duas importantes extensões da forma balanceada foram estudadas por Wang *et al* (ref. [41]) e Shokoohi *et al* (ref. [36]). A primeira define forma balanceada para LFT's (*Linear Fractional Transformations*) de sistema discretos. O termo "balanceado" é utilizado em um sentido mais amplo já que as equações de Lyapunov que definem os grammianos são substituídas por desigualdades (LMI's - *Linear*

Matrix Inequalities). Os autores também destacam a importância desta extensão para simplificação de incertezas em sistema incertos.

A segunda extensão (ref. [36]) compreende a definição de forma balanceada para sistemas lineares *variantes* no tempo. Os autores definem *sistemas uniformemente realizáveis* e *realizações uniformemente balanceadas* e estudam as condições para existência e unicidade destas realizações. Em analogia com o caso invariante no tempo, tais realizações, quando assintoticamente estáveis, possuem grammianos diagonais

$$\Sigma(t) = \begin{bmatrix} \Sigma_1(t) & 0 \\ 0 & \Sigma_2(t) \end{bmatrix}$$

e podem ser reduzidas quando $\Sigma_1(t)$ for muito maior que $\Sigma_2(t)$, isto é quando os autovalores de $\Sigma_1(t)$ forem grandes em comparação com os de $\Sigma_2(t)$.

Ainda sobre extensões, aproveitando o fato de que os dois métodos (perturbações singulares e truncamento) produzem sistemas reduzidos que permanecem balanceados, Liu e Anderson (ref. [27]) propuseram um método misto que alterna a aplicação de um ou outro método. Um rápido exemplo ajuda a clarear a situação: supõe-se que determinado sistema tenha sido balanceado e truncado; o sistema reduzido é também um sistema balanceado de modo que se pode aplicar nova redução de ordem sem que seja necessário balanceá-lo; essa redução envolveria perturbações singulares. Embora os dois métodos tenham o mesmo limitante superior, o primeiro deles (truncamento) tende a produzir maiores erros em baixas frequências, exatamente ao contrário do que acontece quando a técnica das perturbações singulares é aplicada. É então argüido que a utilização alternada dos dois métodos representa um compromisso mais adequado, conferindo ao projetista um certo poder de confinar erros grandes em determinadas faixas de frequências.

Capítulo 3

O problema da aproximação via norma Hankel

Da mesma forma que o trabalho de Moore em [29] expôs à comunidade de controle uma representação de estados que viria a simplificar o problema da redução de modelos, o trabalho de Glover (ref. [17]) coloca-se como um marco no que diz respeito à utilização da norma Hankel com esse fim. Basicamente, Glover se utiliza das propriedades da forma balanceada para parametrizar todas as aproximações de ordem $k < n$ de uma função de transferência $G(s)$ que são ótimas no sentido da norma Hankel. Isto é, funções $\hat{G}(s)$ tais que $\|G(s) - \hat{G}(s)\|_H$ (a norma Hankel do erro absoluto) é mínima. Essas funções também são chamadas aproximações “Hankel-ótimas”.

Após uma ligeira explanação do porquê utilizar a norma Hankel, este capítulo se estrutura de forma a, partindo da parametrização de todas as aproximações ótimas, encontrar uma solução particular do problema que seja adequada para a redução de modelos. Como será colocado mais adiante, se não for exigido da aproximação que seja estritamente própria, o limitante superior do erro em frequência para este método é exatamente a metade daquele disponível para o truncamento

da realização balanceada. Antes de começar, porém, cabe salientar que não é o intuito deste capítulo ser extremamente rigoroso e apresentar provas para todos os resultados. Ao contrário, os resultados serão apresentados em sua essência, deixando ao leitor a possibilidade de consultar as provas em [17].

3.1 A norma Hankel

O objetivo desta seção introdutória é definir norma Hankel, fornecer uma interpretação e esboçar o porquê de sua utilização. A norma Hankel é definida com base em um conjunto de números reais conhecido como *Valores Singulares Hankel*.

Definição 3.1 (Valores Singulares Hankel) *Os valores singulares Hankel de uma matriz de transferência $G(s)$ estável são definidos como*

$$\sigma_i(G(s)) \triangleq \sqrt{\lambda_i(PQ)} \quad (3.1)$$

onde P e Q são as soluções das equações de Lyapunov 2.3 e 2.4. Além disso, convencionou-se que $\forall i, \sigma_i(G(s)) \geq \sigma_{i+1}(G(s))$.

Um conceito fundamental para o desenvolvimento teórico que é apresentado a seguir é a definição de norma Hankel. Embora não seja a mais geral, a seguinte definição é suficiente para os propósitos deste capítulo. Lembra-se, todavia, que a norma Hankel de um sistema instável é igual à norma Hankel de sua parte estável pois, por definição, utiliza-se apenas a parte estável no seu cálculo.

Definição 3.2 (Norma Hankel) *A norma Hankel de uma matriz de transferência $G(s)$ estável é definida como*

$$\|G(s)\|_H \triangleq \sqrt{\lambda_{\max}(PQ)} = \sigma_{\max}(PQ)$$

onde P e Q são as soluções de 2.3 e 2.4.

Uma interpretação de norma Hankel é mais facilmente obtida para o caso onde a variável tempo é discreta. De passagem cabe lembrar que uma solução para o problema da norma Hankel no tempo contínuo soluciona também o problema equivalente ($z = \frac{1+s}{1-s}$) no tempo discreto, embora as normas \mathcal{L}_p do erro em frequência se alterem. O caso $p = \infty$ é uma exceção pois as normas \mathcal{L}_∞ são iguais tanto para o caso discreto quanto para o contínuo.

Considere-se, num momentâneo abuso de notação, que as matrizes A , B , e C representam um sistema discreto. A matriz Hankel deste sistema é tal que cada bloco (i, j) é igual a $CA^{i+j-2}B$, ou seja

$$H = \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{j-1}B & \dots \\ CAB & CA^2B & & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ CA^{i-1}B & \dots & \dots & CA^{i+j-2}B & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz Hankel pode ser escrita como

$$H = W_o W_c$$

onde

$$W_o = (C^T \ (CA)^T \ \dots \ (CA^k)^T \ \dots)^T$$

$$W_c = (B \ AB \ \dots \ A^k B \ \dots)$$

Notando que os grammianos de controlabilidade e observabilidade de um sistema discreto são respectivamente $W_c W_c^T$ e $W_o^T W_o$ e que para quaisquer matrizes quadradas A e B o conjunto de autovalores de AB é igual ao de BA (ref. [42]), conclui-se que

$$\sigma_i^2(H) = \lambda_i(H^T H) = \lambda_i(W_c^T W_o^T W_o W_c) = \lambda_i(W_c W_c^T W_o^T W_o) = \lambda_i(PQ), \quad (3.2)$$

onde P e Q referem-se aos grammianos do sistema discreto.

Neste contexto, $\sigma_i(H)$ significa o i -ésimo valor singular da matriz H , em contraposição a $\sigma_i(G(s))$ que denota o i -ésimo valor singular Hankel da função de transferência $G(s)$. Quando o contexto permitir, a variável s será omitida.

Agora, denote-se por $x(0)$ o estado do sistema no instante $t = 0$ e por $u(t)$ uma entrada que assume valores não-nulos somente para $t < 0$. Dessa forma pode-se escrever $x(0)$ em função de $u(t)$:

$$x(0) = W_c \begin{bmatrix} u(-1) \\ u(-2) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

e calcular a saída, $y(t)$, do sistema para $t > 0$:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \end{bmatrix} = W_o x(0)$$

Portanto, a matriz Hankel ($W_o W_c$) pode ser interpretada como o mapeamento das entradas passadas em saídas futuras através do estado $x(0)$. Mais ainda, como os valores singulares de H são iguais aos valores singulares Hankel da matriz de transferência do sistema (comparando as equações 3.1 e 3.2), a norma Hankel equivale a norma 2 (maior valor singular) deste mapeamento (H).

Ainda falta esclarecer porque utilizar a norma Hankel quando, normalmente, o objetivo dos esforços de redução de modelos é minimizar a norma \mathcal{L}_∞ do erro em frequência. Quando se escolhe uma norma, duas propriedades são requeridas: que ela possa ser minimizada sem um exagerado dispêndio computacional e que seja uma medida apropriada do erro. A discussão precedente sobre a relação entre $\sigma_i(H)$ e $\sigma_i(\hat{G}(z))$ indica que a norma Hankel seja uma boa medida da característica entrada-saída de um sistema e como se verá, ela realmente o é. Quanto ao esforço computacional, o problema da minimização da norma Hankel é uma função quase direta de uma realização balanceada e, por isso, pode ser obtida facilmente.

3.2 Todas as soluções!

Como anunciado anteriormente, esta seção tratará de apresentar uma parametrização de todas as funções de transferência que minimizam a norma Hankel ($\min \|G(s) - \hat{G}(s)\|_H$). Para tanto, seja $G(s)$ uma matriz de funções de transferência de grau n a ser aproximada. Supõe-se que G tem m entradas e m saídas e que é estável e racional. Geralmente, G tem n valores singulares Hankel maiores que zero, distintos ou não, e a escolha do grau k da aproximação determina sua divisão em três conjuntos. O primeiro é formado por r valores singulares iguais a σ_{k+1} (onde σ_{k+1} é o $(k+1)$ -ésimo valor singular), ou seja, r é a multiplicidade do valor singular σ_{k+1} . Os outros dois conjuntos compõem-se respectivamente dos valores singulares maiores e menores que σ_{k+1} . Matematicamente, isso pode ser escrito através da seguinte ordenação dos valores singulares Hankel de $G(s)$:

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_k > \sigma_{k+1} = \dots = \sigma_{k+r} > \sigma_{k+r+1} \geq \dots \geq \sigma_n > 0.$$

Assim, seja

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

uma realização *balanceada* de $G(s)$ tal que os grammianos sejam cuidadosamente ordenados da seguinte maneira:

$$P = Q = \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_{k+1} I_r \end{bmatrix}$$

onde

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_k \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{k+r+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{bmatrix}.$$

Note-se que Σ_1 contém os valores singulares diferentes de σ_{k+1} .

As matrizes A , B e C são, então, particionadas segundo Σ como

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \quad C_2]$$

Para caracterizar todas as aproximações Hankel-ótimas de $G(s)$, procede-se da seguinte maneira. Primeiro, selecionam-se as matrizes U tais que

$$U^T U = I$$

e

$$C_2 + U B_2^T = 0.$$

Na sequência, constrói-se uma função de transferência $G_U(s) = G(s, U)$ cuja parte estável, $\hat{G}(s)$, será uma aproximação Hankel-ótima de $G(s)$. Os detalhes da construção de determinada G_U serão apresentados na definição 3.3 e, a seguir, as restrições sobre U que produzem aproximações ótimas serão formalizadas através de uma definição e um teorema. O uso exaustivo de todas as matrizes que satisfazem as condições acima garante que todas as aproximações Hankel-ótimas serão encontradas. No entanto, diferentes escolhas de U podem levar à mesma aproximação $\hat{G}(s)$.

Definição 3.3 *Dada uma matriz U qualquer, denote-se por $G_U(s)$ a função de transferência do sistema*

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} \hat{u} \quad (3.3)$$

$$\hat{y} = [\hat{C}_1 \quad \hat{C}_2] \hat{x} + \hat{D} \hat{u} \quad (3.4)$$

onde

$$\hat{A}_{11} = \Gamma^{-1}(\sigma_{k+1}^2 A_{11}^T + \Sigma_1 A_{11} \Sigma_1 - \sigma_{k+1} C_1^T U B_1^T)$$

$$\begin{aligned}
\hat{B}_1 &= \Gamma^{-1}(\Sigma_1 B_1 + \sigma_{k+1} C_1^T U) \\
\hat{C}_1 &= C_1 \Sigma_1 + \sigma_{k+1} U B_1^T \\
B_2 \hat{B}_2^T &= 0 \\
\hat{C}_2 &= -U \hat{B}_2^T \\
\hat{A}_{12} &= -\Gamma^{-1} C_1^T \hat{C}_2 \\
\hat{A}_{21} &= -\hat{B}_2 B_1^T \\
\hat{A}_{22} + \hat{A}_{22}^T &= \frac{\hat{B}_2 \hat{B}_2^T}{\sigma_{k+1}} \\
\hat{D} &= D - \sigma_{k+1} U \\
\Gamma &= \Sigma_1^2 - \sigma_{k+1}^2 I.
\end{aligned}$$

Assim, \mathcal{G}_U é definido como o conjunto de todas as funções de transferência $\hat{G}(s)$ que podem ser construídas como a parte estável de G_U . Ou seja, para cada U determina-se G_U e definem-se $\hat{G}(s)$ e $F(s)$ tais que

$$\begin{aligned}
\hat{G}(s) &\in \mathcal{H}_\infty^+ \\
F(s) &\in \mathcal{H}_\infty^- \\
G_U(s) &= \hat{G}(s) + F(s)
\end{aligned}$$

e, assim, $\hat{G}(s) \in \mathcal{G}_U$. Ou,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_U &\triangleq \{\hat{G}(s) : \hat{G}(s) \in \mathcal{H}_\infty^+ \text{ e} \\
&\quad (\exists F(s) \in \mathcal{H}_\infty^-, \exists G_U(s), G_U(s) = \hat{G}(s) + F(s))\}
\end{aligned}$$

Note-se que existe, de fato, um conjunto de funções \hat{G}_U que podem ser construídas para cada matriz U e que os graus de liberdade residem na escolha de \hat{B}_2 e \hat{A}_{22} . Além disso, apesar da definição aqui proposta para a matriz \hat{D} ser útil posteriormente, ela poderia ter sido escolhida arbitrariamente sem alterar a norma Hankel de $G(s) - \hat{G}(s)$.

Definição 3.4 *Define-se \mathcal{G} como*

$$\mathcal{G} \triangleq \{\hat{G}(s) : \exists U, \hat{G}(s) \in \mathcal{G}_U \text{ e } U^T U = I \text{ e } C_2 + U B_2^T = 0\}$$

Assim definido, \mathcal{G} é o conjunto de todas as funções de transferência \hat{G} tais que

$$\hat{G}(s) \in \mathcal{G}_U$$

para alguma matriz U restrita somente por

$$U^T U = I$$

e

$$C_2 + U B_2^T = 0.$$

O teorema a seguir guarda em si a desejada parametrização de que trata esta seção.

Teorema 3.5 *Qualquer aproximação Hankel-ótima de $G(s)$ pertence a \mathcal{G} e pode ser conseguida com*

$$0 \leq \dim(\hat{A}_{22}) \leq 2k + r - 1$$

onde r é a multiplicidade do $(k + 1)$ -ésimo valor singular Hankel.

A prova deste teorema é relativamente complexa e longa e encontra-se em [17]. Note-se, novamente, que a dimensão de \hat{A}_{11} é $n - r$ e que existe uma certa liberdade na escolha de \hat{A}_{22} e \hat{B}_2 . Outro detalhe importante é que se $(\hat{A}_{22}, \hat{B}_2)$ for completamente controlável então o grau da aproximação é k .

O último ponto a destacar é que se $G(s)$ for $p \times m$ ou $m \times p$, ao invés de $m \times m$, a restrição $U^T U = I$ passa a ser $U^T U \leq I$.

3.3 Uma classe de soluções e uma solução particular

Tendo estabelecido anteriormente todas as soluções do problema, a tarefa destinada a esta seção fica bastante facilitada. Na verdade, não fosse o objetivo minimizar a norma \mathcal{L}_∞ , qualquer afirmação com respeito unicamente ao problema de otimização ficaria sem sentido. No entanto, não é uma simples solução ao problema da aproximação da norma Hankel que se procura; é, sim, uma que seja facilmente calculada e que produza erros \mathcal{L}_∞ satisfatoriamente pequenos.

Antes de apresentar a solução desejada é proveitoso lembrar que, ao definir $\hat{G}(s)$ (ver definições 3.3 e 3.4) tinham-se graus de liberdade na escolha de U , \hat{A}_{22} e \hat{B}_2 e, mais ainda, havia liberdade na dimensão atribuída a \hat{A}_{22} . Em sintonia com estas possibilidades o seguinte teorema define uma classe particular de soluções ao problema da norma Hankel.

Teorema 3.6 *Seja $G(s)$ com m entradas e m saídas, estável e racional. Seja uma matriz U qualquer tal que*

$$U^T U = I$$

e

$$C_2 + U B_2^T = 0.$$

Assim, a parte estável da função de transferência do sistema

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \hat{A}_{11}\hat{x} + \hat{B}_1\hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{C}_1\hat{x} + \hat{D}\hat{u}\end{aligned}$$

onde \hat{A}_{11} , \hat{B}_1 , \hat{C}_1 e \hat{D} são apresentadas na definição 3.3, constitui uma aproximação Hankel-ótima de $G(s)$.

Ressalte-se que este teorema define uma classe de soluções da maneira mais simples possível, ou seja, escolhe nula a dimensão de \hat{A}_{22} , considerando somente a

parte referente a \hat{A}_{11} . Outra vez, no caso da planta não ser quadrada, a restrição $U^T U = I$ transforma-se em $U^T U \leq I$.

A solução do problema da norma Hankel que será utilizada para redução de modelos é dada pelo seguinte corolário.

Corolário 3.7 *Seja $G(s)$ como no teorema 3.6 mas com p entradas e m saídas.*

Defina-se

$$U_0 = -C_2 B_2^\dagger{}^T \quad (3.5)$$

onde B_2^\dagger denota a pseudo-inversa de Moore-Penrose de B_2 . Em particular, se $\text{posto}(B_2) = r$ então $B_2^\dagger = B_2^T (B_2 B_2^T)^{-1}$.

Assim, a parte estável da função de transferência do sistema

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{A}_{11} \hat{x} + \hat{B}_1 \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{C}_1 \hat{x} + \hat{D} \hat{u} \end{aligned}$$

onde \hat{A}_{11} , \hat{B}_1 , \hat{C}_1 e \hat{D} são apresentadas na definição 3.3, é uma aproximação Hankel-ótima de $G(s)$.

Os limitantes do erro \mathcal{L}_∞ mostrarão que esta escolha de U é adequada ao processo de redução. Como também se verá, o cálculo de B_2^\dagger será facilitado porque B_2 terá posto igual a r .

3.4 Análise de erro

Até agora, viu-se que o cálculo da aproximação ótima com respeito à norma Hankel é uma função quase direta da realização balanceada. A pergunta mais importante, porém, foi postergada: uma aproximação ótima deste tipo é uma boa aproximação? É o momento para respondê-la e esta seção o fará mostrando que a máxima diferença entre sistema e aproximação é tão pequena quanto aquela encontrada para o método do capítulo 2. Além disso, ver-se-á que permitindo a

existência de um termo relativo à transferência direta este limitante pode cair à metade.

Supondo $G(s)$ estável, cabe apresentar alguns conceitos e propriedades. Primeiro, a caracterização da norma Hankel em termos dos valores singulares Hankel é feita assim:

$$\|G(s)\|_H = \sigma_{\max}(G(s)).$$

Os valores singulares Hankel também podem ser usados para estabelecer um limitante para a norma \mathcal{L}_∞ de $G(s)$ se $G(\infty) = 0$ (ref. [17]):

$$\|G(j\omega)\|_\infty \leq 2 \sum_{i=1}^n \sigma_i(G(s)).$$

Outra propriedade interessante que relaciona os valores singulares Hankel com a norma \mathcal{L}_∞ é o fato de que existe uma matriz D_0 , de transferência direta, tal que

$$\|G(j\omega) + D_0\|_\infty \leq \sum_{i=1}^n \sigma_i(G(s)).$$

Sendo $\hat{G}(s)$ uma aproximação Hankel-ótima de grau k para $G(s)$, que é uma matriz de transferência racional e estável de dimensão $m \times m$, o melhor que se poderia conseguir com relação à norma \mathcal{L}_∞ é

$$\|G(j\omega) - \hat{G}(j\omega)\|_\infty = \sigma_{k+1}(G(s)).$$

Porém, isso só é conseguido se for permitido a $\hat{G}(s)$ ter pólos instáveis (ver [17]). Colocando de outra maneira, a presença de uma parte instável na aproximação Hankel-ótima diminui a norma \mathcal{L}_∞ do erro. Em geral (como no decorrer desta seção, onde $\hat{G}(s)$ denotará uma matriz estável)

$$\|G(j\omega) - \hat{G}(j\omega)\|_\infty \geq \sigma_{k+1}(G(s)).$$

Quanto à norma Hankel, o valor ótimo do erro é dado pela seguinte equação:

$$\min_{\hat{G}(s)} \|G(s) - \hat{G}(s)\|_H = \sigma_{k+1}(G(s)),$$

ou seja, $\sigma_1(G(s) - \hat{G}(s)) = \sigma_{k+1}(G(s))$. Isso quer dizer que para todo i , $\sigma_i(G(s) - \hat{G}(s)) \leq \sigma_{k+1}(G(s))$ pois σ_1 é o maior dos valores singulares. Mais que isso, nota-se que a fim de minimizar o maior valor singular, todos os primeiros $n + k - l$ valores singulares igualam-se a $\sigma_{k+1}(G(s))$ (onde $k + l$ é a dimensão da matriz de dinâmica do sistema da equação 3.3).

O resultado principal desta seção é estabelecido no seguinte teorema que, como todos os resultados até aqui apresentados, encontra-se acompanhado da respectiva prova em [17]. Em oposição a outros resultados, a planta não é necessariamente quadrada neste caso.

Teorema 3.8 *Seja $\hat{G}(s)$ a aproximação Hankel-ótima de grau k relativa à matriz $G(s)$ (estável, racional e $p \times m$) dada no Corolário 3.7. Então*

$$\sigma_i(G(s) - \hat{G}(s)) \leq \sigma_{k+1}(G(s)), \quad i = 1, 2, \dots, 2k + r \quad (3.6)$$

$$\sigma_i(G(s) - \hat{G}(s)) \leq \sigma_{i-k}(G(s)), \quad i = 2k + r + 1, \dots, n + k \quad (3.7)$$

e existe D_0 tal que

$$\|G(j\omega) - \hat{G}(j\omega) - D_0\|_\infty \leq \sigma_{k+1}(G(s)) + \sum_{i=k+r+1}^n \sigma_i(G(s)). \quad (3.8)$$

Note-se que, quando $r = 1$, este resultado significa que o erro obtido com este método é metade daquele do capítulo 2. Como comentado em [27] para um dos métodos do capítulo 2, a exigência de $D_0 = 0$ dobra este limitante. A princípio, isso incentivaria a adoção do truncamento da realização balanceada em detrimento da aproximação via norma Hankel. No entanto, além dos resultados práticos serem diferentes ora em favor de um método ora em favor do outro, o método da norma Hankel conduzirá a uma nova metodologia para aproximar um sistema com pólos instáveis.

3.5 Aproximando um sistema estável

As seções anteriores trataram de estabelecer o problema da aproximação de sistemas de forma ótima no sentido da norma Hankel, apresentaram sua solução e mostraram que tal solução também é uma boa aproximação no sentido da norma \mathcal{L}_∞ do erro absoluto. O que resta para a presente seção é colocar de forma algorítmica o método da norma Hankel e propor uma matriz de transferência direta D_0 que satisfaça o limitante do teorema 3.8.

O método apresentado no Corolário 3.7 será implementado. Assume-se um sistema estável, na sua forma balanceada (como no capítulo 2) e com valores singulares

$$\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_k > \sigma_{k+1} > \sigma_{k+2} \geq \cdots \geq \sigma_n > 0.$$

Observe-se que estas condições sobre os valores singulares Hankel impõem que a realização seja mínima e que $r = 1$ ($\sigma_k > \sigma_{k+1} > \sigma_{k+2}$; k é o grau da aproximação). Pode-se superar o primeiro problema através de um método de balanceamento que produza um realização mínima, além de balanceada. No entanto, a proximidade de σ_{k+1} e σ_{k+2} pode causar problemas numéricos quando do cálculo de Γ^{-1} abaixo.

Seja, portanto, a realização balanceada de $G(s)$ dada por (A, B, C, D) e particionada como a seguir. Mais uma vez é importante notar a ordem particular dos valores singulares (e consequentemente dos estados).

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \quad C_2]$$

$$\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_k, \sigma_{k+2}, \dots, \sigma_n, \sigma_{k+1}\} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_{k+1} \end{bmatrix}$$

Com este particionamento $\dim(A_{22}) = 1$ e $\text{rank}(B_2) = r = 1$, devido a suposição de que a realização é mínima. Agora, define-se o sistema $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ por:

$$U = -(C_2 B_2)/(B_2 B_2^T) \quad (3.9)$$

$$\Gamma = \Sigma_1^2 - \sigma_{k+1}^2 I \quad (3.10)$$

$$\hat{A} = \Gamma^{-1}(\sigma_{k+1}^2 A_{11}^T + \Sigma_1 A_{11} \Sigma_1 - \sigma_{k+1} C_1^T U B_1^T) \quad (3.11)$$

$$\hat{B} = \Gamma^{-1}(\Sigma_1 B_1 + \sigma_{k+1} C_1^T U) \quad (3.12)$$

$$\hat{C} = C_1 \Sigma_1 + \sigma_{k+1} U B_1^T \quad (3.13)$$

$$\hat{D} = D - \sigma_{k+1} U \quad (3.14)$$

Assim, $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ define uma realização de $G_U(s)$ da qual dois outros sistemas serão extraídos: um estável, que definirá a aproximação procurada e um completamente instável (anti-causal ou anti-estável), que poderá ser utilizado para aproximar sistemas instáveis (seção 3.6). Tal separação dar-se-á em duas etapas. Primeiro, reduz-se \hat{A} à sua forma ordenada de Schur usando uma matriz unitária V tal que

$$V^T \hat{A} V = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$$

onde $\text{Re}(\lambda_i(\tilde{A}_{11})) < 0$ e $\text{Re}(\lambda_i(\tilde{A}_{22})) > 0$. O segundo passo parte de uma matriz $K \in \mathbb{R}^{k \times (n-k-1)}$ tal que

$$\tilde{A}_{11} K - K \tilde{A}_{22} + \tilde{A}_{12} = 0.$$

A existência de tal matriz é garantida pelo posicionamento do autovalores de \tilde{A}_{11} e \tilde{A}_{22} (ref. [5]). Tendo calculado K , constrói-se

$$T = V \begin{bmatrix} I & K \\ 0 & I \end{bmatrix} = [T_1 \quad T_2]$$

$$S = \begin{bmatrix} I & -K \\ 0 & I \end{bmatrix} V^T = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}.$$

A transformação $T = S^{-1}$ desacopla os estados da realização, definindo dois sistemas:

$$\hat{G}(s) = \hat{D} + \tilde{C}_1(sI - \tilde{A}_{11})^{-1} \tilde{B}_1 \quad (3.15)$$

$$\hat{F}(s) = \tilde{C}_2(sI - \tilde{A}_{22})^{-1}\tilde{B}_2 \quad (3.16)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1 &= S_1 \hat{B} & \tilde{B}_2 &= S_2 \hat{B} \\ \tilde{C}_1 &= \hat{C}T_1 & \tilde{C}_2 &= \hat{C}T_2 \end{aligned}$$

A subseção a seguir redundará em uma matriz D_0 tal que $\hat{G}(s) + D_0$ constitui a aproximação que se está procurando.

3.5.1 Cálculo da transferência direta

Partindo da constatação que a matriz D_0 que satisfaz o teorema 3.8 não é necessariamente única apresentar-se-á uma possível escolha para D_0 . Aqui, o resultado de Glover será apresentado sem justificativas visto que as razões expostas em [17] estão por demais inseridas no contexto e não seria conveniente reconstruí-lo aqui apenas para explicar em sua totalidade a escolha desta D_0 . Na verdade, o uso de matrizes de transferência direta em modelos reduzidos já é por si só questionável sendo apresentado aqui somente para expor plenamente o conteúdo de [17]. O que é mais uma vez destacável, todavia, é que D_0 é arbitrária e que a escolha apresentada satisfaz o teorema 3.8.

Seja (A_F, B_F, C_F) uma realização balanceada de $-F(-s)$ (equação 3.16) com valores singulares Hankel dados por $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-k-1} \geq 0$. Note-se que $-F(-s)$ é estável e tem uma representação em variáveis de estado dada por $(-\hat{A}_{22}, \hat{B}_2, \hat{C}_2)$. Inicialmente, faça-se $D_0 = 0$, lembrando que a equação 3.15 já inclui um termo \hat{D} .

Defina-se $q \triangleq p + m$ (q poderia ser qualquer inteiro maior que $p + m$). As matrizes Z e Y , de dimensão $q \times (n - k - 1)$, são definidas por

$$Z = \begin{bmatrix} B_F^T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} C_F \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, z_i e y_i denotam a i -ésima coluna de Z e Y , respectivamente.

Como última definição preliminar, seja x um vetor qualquer e v_x o vetor de

Householder (conforme [19]) tal que

$$(I - 2v_x v_x^T)x = - \begin{bmatrix} \alpha_x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde $\alpha_x = \|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$. Assim definido, v_x é dado por

$$v_x = \frac{x + \|x\|_2 e_1}{\|x + \|x\|_2 e_1\|_2}; \quad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Segue, finalmente, o algoritmo. Para cada i entre 1 e $n - k - 1$, inclusive, os seguintes passos são executados:

1. Calculam-se os *vetores de Householder* v_y e v_z referentes a y_i e z_i , respectivamente. Da mesma forma, α_y e α_z são as normas de y_i e z_i .
2. Define-se

$$U \triangleq (I - 2v_y v_y^T) \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_y}{\alpha_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{p-1} & 0 \\ 0 & I_{m-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{q-p-m+1} \end{bmatrix} (I - 2v_z v_z^T).$$

3. Se $i < n - k - 1$ então, para cada j entre $i + 1$ e $n - k - 1$, inclusive,

$$\begin{aligned} y &= -\frac{y_j \mu_j + U z_j \mu_i}{\sqrt{\mu_i^2 - \mu_j^2}} \\ z_j &= \frac{z_j \mu_j + U^T y_j \mu_i}{\sqrt{\mu_i^2 - \mu_j^2}} \\ y_j &= y; \end{aligned}$$

4. Recalcula-se D_0 :

$$D_0 = D_0 + (-1)^i \mu_i \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix} U \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como resultado, obtém-se D_0 tal que

$$\|G(s) - \hat{G}(s) - D_0\|_\infty \leq \sigma_{k+1} + \sum_{i=1}^{n-k-1} \mu_i$$

e o fato de que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-k-1\}$, $\mu_i = \sigma_i(F(-s)) \leq \sigma_{k+1+i}(G(s))$ (de acordo com [17]) conduz a afirmação de que a aproximação $\hat{G}(s) + D_0$ de $G(s)$ satisfaz

$$\|G(s) - \hat{G}(s) - D_0\|_\infty \leq \sum_{i=k+1}^n \sigma_i.$$

3.6 Aproximando um sistema instável

Até aqui, a única maneira para aproximar um sistema com pólos instáveis era aquela apresentada na seção 2.5 para o truncamento da realização balanceada e que também é aplicável para o método descrito neste capítulo. No entanto, tratando-se das aproximações Hankel-ótimas outro procedimento é possível (ver também referência [17]).

Normalmente é o caso do sistema a ser aproximado estar inserido em uma configuração estável em malha fechada sendo necessário que modelo e aproximação possuam o mesmo número de pólos no semi-plano direito (e os mesmos pólos sobre o eixo imaginário). Para produzir um modelo reduzido com estas características separa-se $G(s)$ em suas partes estável (G_1) e anti-estável (G_2)

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s).$$

como foi feito no capítulo 2.

Se o sistema tiver pólos sobre o eixo imaginário eles devem ser copiados para a aproximação. Em seguida, $\hat{G}_1(s)$ é definida como a aproximação Hankel-ótima de $G_1(s)$ e, como visto na seção 3.5, este procedimento tem como subproduto a matriz de transferência $F_1(s)$ (equação 3.16). Assim, define-se $\hat{G}_2(-s)$ como a aproximação Hankel-ótima de $G_2(-s) + F_1(-s)$. Finalmente,

$$\hat{G}(s) = \hat{G}_1(s) + \hat{G}_2(s)$$

é a aproximação que se está procurando para $G(s)$. A única parcela realmente reduzida é $\hat{G}_1(s)$. Em $\hat{G}_2(s)$ modificam-se apenas as posições dos pólos (e zeros) em relação a $G_2(s)$.

O método recém delineado fornece um limitante superior menor que aquele da seção 2.5. Infelizmente, um limitante menor não significa necessariamente uma aproximação melhor embora esta pequena variação na posição dos pólos instáveis possa realmente diminuir a norma \mathcal{L}_∞ do erro.

Capítulo 4

Redução ponderada

O capítulo 2 mostrou que a forma balanceada constitui um excelente instrumento para obtenção de modelos reduzidos. Uma extensão lógica para aquele procedimento é a introdução de ponderações em frequência. Neste capítulo, o trabalho de Enns (ref. [16]) será apresentado e ver-se-á que análise semelhante àquela do capítulo 2 conduz à extensão procurada sem maiores dificuldades.

De forma análoga, uma extensão para o caso da redução via aproximação da norma Hankel (capítulo 3) será apresentada como sugerido [48]. Embora, o método da norma Hankel com ponderações seja, como a versão original do capítulo 3, levemente mais complicado que o truncamento da forma balanceada, ele possibilita, em alguns casos, que se obtenham limitantes superiores para o erro em frequência (ref. [2]). A idéia inicial deste método é devida a Latham e Anderson (ref. [24]).

O principal objetivo do estudo das ponderações é efetuar a redução do controlador levando em conta a característica do sistema como um todo, ou seja, considerando tanto controlador quanto planta. Eventualmente, pode-se derivar ponderações que assimilem as características do sinal de controle e das perturbações a que o sistema estará sujeito. Mais adiante, neste capítulo, será desenvolvido um método de redução de controladores (seção 4.4) que utiliza uma ponderação apro-

priada para tentar manter a estabilidade do sistema com o controlador reduzido. Este método foi sugerido em [16] e também é usado no capítulo 5.

Embora as ponderações seja estudadas com o intuito de serem utilizadas para garantir a estabilidade do sistema com controlador reduzido, outros usos são possíveis. Por exemplo, na seção 4.5 serão apresentadas ponderações que visam adaptar o processo de redução a características peculiares do sistema ou ao seu desempenho. O uso de ponderações serve também para selecionar faixas de frequências nas quais a aproximação deve ser mais fiel.

4.1 A forma balanceada e as ponderações

A extensão aqui apresentada é motivada pela interpretação geométrica da realização balanceada dada no teorema 2.1. Considera-se um sistema estável e mínimo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{4.1}$$

o qual deverá ser balanceado sujeito às ponderações W_i e W_o , aplicadas respectivamente na entrada e na saída. Essas ponderações são representadas por matrizes de funções de transferência estáveis e mínimas dadas por

$$\begin{aligned} W_i &= C_i(sI - A_i)^{-1}B_i + D_i \\ W_o &= C_o(sI - A_o)^{-1}B_o + D_o. \end{aligned}$$

A figura 4.1 apresenta o sistema com as ponderações incluídas. Com base nela, os conjuntos de estados do sistema da equação 4.1 que são “muito controláveis”, S_c , ou “pouco observáveis”, S_o^\perp , serão caracterizados. Cabe ressaltar que apenas os estados do sistema estarão nestes conjuntos; os estados das ponderações não. Note-se que S_c corresponde aos estados que podem ser atingidos com entradas de norma menor que a unidade enquanto S_o^\perp reúne os estados que, como condições iniciais, produzem saída com norma inferior a unidade.

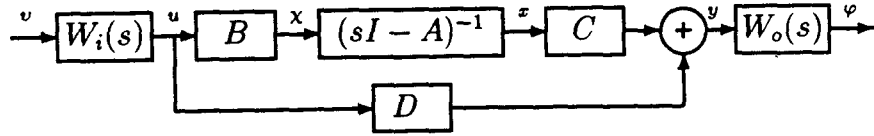


Figura 4.1: Sistema com ponderações de entrada e de saída

Relembre-se agora o resultado do teorema 2.1: para determinada $F(t)$ cujo grammiano pode ser decomposto em

$$W = V\Sigma V^T$$

$$\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$$

$$V^T V = I, \quad V = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]$$

tem-se:

1. A superfície de S_c é um elipsóide com semi-eixos iguais a $\sqrt{\sigma_i}v_i$ com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
2. A superfície de S_o^\perp é um elipsóide com semi-eixos iguais a $\frac{1}{\sqrt{\sigma_i}}v_i$ com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Supondo que as realizações de W_i e W_o são obtidas usando os estados x_i e x_o , utiliza-se a função de transferência de v para x a fim de caracterizar o conjunto controlável do sistema da figura 4.1. Isto é, utiliza-se

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_i &= \bar{A}_i \bar{x}_i + \bar{B}_i v \\ x &= \bar{C}_i \bar{x}_i \end{aligned} \tag{4.2}$$

com

$$\bar{x}_i = \begin{bmatrix} x \\ x_i \\ x_o \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A & BC_i & 0 \\ 0 & A_i & 0 \\ B_o C & B_o DC_i & A_o \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\bar{B}_i &= \begin{bmatrix} BD_i \\ B_i \\ B_o DD_i \end{bmatrix} \\ \bar{C}_i &= [I \ 0 \ 0]\end{aligned}$$

A resposta deste sistema com condições iniciais nulas é a $F(t) = \bar{C}_i e^{\bar{A}_i t} \bar{B}_i$ cujo grammiano caracteriza S_c . Tal grammiano, portanto, é

$$\begin{aligned}P_w &= \int_0^\infty F(t) F^T(t) dt \\ P_w &= \int_0^\infty \bar{C}_i e^{\bar{A}_i t} \bar{B}_i \bar{B}_i^T e^{\bar{A}_i^T t} \bar{C}_i^T dt\end{aligned}$$

Note-se que o grammiano de controlabilidade do sistema da figura 4.1 pode ser escrito em função de \bar{A}_i e \bar{B}_i e particionado segundo \bar{x}_i :

$$P = \int_0^\infty e^{\bar{A}_i t} \bar{B}_i \bar{B}_i^T e^{\bar{A}_i^T t} dt = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ P_2^T & P_4 & P_5 \\ P_3^T & P_5^T & P_6 \end{bmatrix}$$

Assim, tem-se

$$P_w = \bar{C}_i P \bar{C}_i^T = [I \ 0 \ 0] P \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P_1.$$

Embora este resultado forneça uma maneira simples de calcular o *grammiano ponderado*, é importante notar que se estão realizando operações desnecessárias. Isso pode ser verificado com base na equação 4.2 onde nota-se que os estados x_o não tem qualquer influência sobre a saída (que são os estados x) sendo, portanto, passíveis de eliminação.

A caracterização de S_o^\perp segue por dualidade usando a transferência de χ para φ

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_o &= \bar{A}_o \bar{x}_o + \bar{B}_o \chi \\ \varphi &= \bar{C}_o \bar{x}_o\end{aligned}\tag{4.3}$$

com

$$\bar{x}_o = \begin{bmatrix} x \\ x_i \\ x_o \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\bar{A}_o &= \begin{bmatrix} A & BC_i & 0 \\ 0 & A_i & 0 \\ B_o C & B_o DC_i & A_o \end{bmatrix} \\ \bar{B}_o &= \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{C}_o &= [D_o C \quad D_o DC_i \quad C_o]\end{aligned}$$

e $F^T(t) = \bar{C}_o e^{\bar{A}_o t} \bar{B}_o$. Assim, a caracterização do conjunto observável é feita pelo grammiano

$$\begin{aligned}Q_w &= \int_0^\infty F(t) F^T(t) dt \\ Q_w &= \int_0^\infty \bar{B}_o^T e^{\bar{A}_o^T t} \bar{C}_o^T \bar{C}_o e^{\bar{A}_o t} \bar{B}_o dt\end{aligned}$$

que, utilizando o grammiano de observabilidade do sistema completo em função de \bar{A}_o e \bar{C}_o ,

$$Q = \int_0^\infty e^{\bar{A}_o^T t} \bar{C}_o^T \bar{C}_o e^{\bar{A}_o t} dt = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ Q_2^T & Q_4 & Q_5 \\ Q_3^T & Q_5^T & Q_6 \end{bmatrix}$$

pode ser escrito como

$$Q_w = \bar{B}_o^T Q \bar{B}_o = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1.$$

As mesmas observações relativas à utilidade dos estados x_o na equação 4.2 são aplicáveis para os estados x_i na equação 4.3. Em seguida isso será melhor colocado.

Resta aplicar uma transformação ao sistema da equação 4.1 para que os eixos das elipses dadas por P_w e Q_w sejam alinhados. Mostrar que tal transformação existe é um pequeno exercício de manipulações algébricas. Assim, o método para realizar o balanceamento é calcular P e Q como soluções das respectivas equações de Lyapunov, extrair os cantos superiores esquerdos e balanceá-los. Note-se que balancear P_w e Q_w não significa balancear P e Q .

Antes de continuar o estudo das ponderações em frequência e aplicá-las ao caso de redução de controladores é interessante fazer um pequeno resumo do método, procedendo as simplificações possíveis.

1. Cálculo de P : P satisfaz

$$\bar{A}P + P\bar{A}^T + \bar{B}\bar{B}^T = 0$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & BC_i \\ 0 & A_i \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} BD_i \\ B_i \end{bmatrix}$$

2. Cálculo de Q : Q satisfaz

$$\bar{A}^T P + P\bar{A} + \bar{C}^T \bar{C} = 0$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_o C & A_o \end{bmatrix} \quad \bar{C} = [D_o C \quad C_o]$$

3. Cálculo de P_w e Q_w :

$$P_w = [I \quad 0] P \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_w = [I \quad 0] Q \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Balanceamento de P_w e Q_w conforme capítulo 2, ou seja, achar T tal que

$$T^{-1} P_w T^{-T} = \Sigma = T^T Q_w T.$$

5. Colocar o sistema na forma balanceada.

$$A_b = T^{-1} A T \quad B_b = T^{-1} B \quad C_b = C T \quad D_b = D$$

6. Truncar o sistema na ordem desejada.

Esta metodologia pode ser colocada de uma maneira mais simples porém menos eficiente. Para calcular P e Q basta utilizar o sistema da figura 4.1 como um todo:

$$A_t = \begin{bmatrix} A & BC_i & 0 \\ 0 & A_i & 0 \\ B_o C & B_o DC_i & A_o \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 B_t &= \begin{bmatrix} BD_i \\ B_i \\ B_o DD_i \end{bmatrix} \\
 C_t &= [D_o C \quad D_o DC_i \quad C_o].
 \end{aligned}$$

Em seguida, retira-se a parte que interessa a redução, ou seja, P_w e Q_w , os cantos superiores esquerdos de P e Q . O resto segue a partir do passo 4 (logo acima).

4.2 Aproximações Hankel-ótimas com ponderação

Nesta seção, o problema análogo à redução balanceada ponderada será estudado para o caso de aproximações Hankel-ótimas. Como será visto a seguir, o método é bastante restrito no que diz respeito às ponderações possíveis, o que, no entanto, não o impede de ser utilizado para o problema da redução de controladores (o principal motivo do estudo das ponderações).

O problema da aproximação Hankel-ótima ponderada de uma função de transferência consiste em, dada uma matriz $G(s)$ e ponderações W_i e W_o , encontrar a matriz $\hat{G}(s)$ que minimize $\|W_o(s)(G(s) - \hat{G}(s))W_i(s)\|_H$ onde $\|\cdot\|_H$ é a norma Hankel como definida no capítulo 3. Da função que minimize a norma Hankel espera-se que produza um baixo valor (próximo do limitante inferior) para a norma \mathcal{L}_∞ .

A primeira abordagem para este problema foi apresentada por Latham e Anderson em [24] para a qual Anderson obteve um limitante superior em [2]. Infelizmente, estes resultados requerem que as ponderações sejam bipróprias, inviabilizando sua utilização para reduzir controladores. O método descrito a seguir deve-se a Zhou em [47].

Supõe-se que $G(s)$ é estável e que as ponderações $W_i(s)$ e $W_o(s)$ são anti-

estáveis¹ com realizações mínimas representadas por $(A_{w_i}, B_{w_i}, C_{w_i}, D_{w_i})$ e $(A_{w_o}, B_{w_o}, C_{w_o}, D_{w_o})$. Note-se que a suposição de ponderações mínimas não é problemática uma vez que é possível encontrar uma realização mínima antes de efetuar a redução. O que realmente restringe o universo de ponderações aceitáveis é que elas devem ter todos os seus zeros no semi-plano direito, da mesma forma que ocorre com os pólos. De fato, a condição sobre os zeros pode ser relaxada (basta que os zeros das ponderações não coincidam com os pólos da aproximação \hat{G}_1 definida a seguir) embora isso em nada facilite o processo de redução de controladores.

Seja o operador $[\cdot]_-$ definido com a extração da parte estável, isto é, se $G(s) = G_e(s) + G_i(s)$ então $[G(s)]_- = G_e(s)$. Para obtenção de uma aproximação (de ordem k) Hankel-ótima de G ponderada por W_i e W_o utiliza-se, como primeiro passo, uma aproximação obtida como no capítulo 3 para $[W_o G W_i]_-$. Em outras palavras, encontra-se uma função $\hat{G}_1(s)$ de ordem k tal que

$$\|[W_o G W_i]_- - \hat{G}_1\|_H$$

é mínima.

De posse desta função $\hat{G}_1(s)$, definida por $(\hat{A}_1, \hat{B}_1, \hat{C}_1, \hat{D}_1)$, e garantindo as condições colocadas nos parágrafos anteriores existem matrizes X, Y, V e Z tais que

$$A_{w_o} X - X \hat{A}_1 + B_{w_o} Y = 0$$

$$C_{w_o} X + D_{w_o} Y = \hat{C}_1$$

$$V A_{w_i} - \hat{A}_1 V + Z C_{w_i} = 0$$

$$V B_{w_i} + Z D_{w_i} = \hat{B}_1$$

e, assim,

$$G_k(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_1 & Z \\ \hline Y & 0 \end{array} \right]$$

¹A necessidade de ponderações anti-estáveis decorre da maneira como o método é construído

é uma aproximação ótima no sentido da norma Hankel ponderada, isto é, G_k faz

$$\|W_o(G - G_k)W_i\|_H = \sigma_{k+1}([W_oGW_i]_-).$$

4.3 Uma outra abordagem

O problema da redução de modelo sempre caracterizou-se pela diversidade de abordagens. A redução ponderada não é exceção. A solução encontrada por Zhou em [46] será apresentada nesta seção. Embora também não seja uma solução geral, ela apresenta a interessante propriedade de conduzir à obtenção de um limitante superior. Além disso, esta abordagem não está atrelada a nenhum método de redução de modelo e pode ser usada tanto com a forma balanceada quanto com a norma Hankel.

Seja a ponderação $W(s)$ dada por (A_w, B_w, C_w) e o modelo a ser reduzido $G(s)$ dado por (A, B, C, D) . Além da restrição evidente de que $D_w = 0$, assume-se que $G(s)$ é estável, B_w é inversível e C_w tem posto completo por linhas. Supõe-se também que A e A_w não tem nenhum autovalor em comum. Estas restrições praticamente inviabilizam o uso deste método para redução de controladores. Aqui se utilizam ponderações na saída mas a versão pela entrada também existe.

Sendo assim, seja $P \in \mathbb{R}^{n_w \times n}$ a única solução de $A_w P - PA + B_w C = 0$. Determinando o sistema estável

$$\hat{G}_1(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hline \hat{C}_1 & \hat{D}_1 \end{array} \right]$$

que é uma aproximação de ordem k de

$$G_1(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C_w P & 0 \end{array} \right]$$

pode-se calcular

$$X = C_w^T (C_w C_w^T)^{-1} \hat{C}_1$$

$$\begin{aligned} Y &= B_w^{-1}(X\hat{A}_1 - A_w X) \\ \hat{D} &= B_w^{-1}(-PB + X\hat{B}_1) + D \end{aligned}$$

e construir

$$G_r(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hline Y & \hat{D} \end{array} \right].$$

Construído desta maneira, G_r é tal que

$$\|W(G - G_r)\|_\infty \leq 2\|G_1 - \hat{G}_1\|_\infty$$

e, se $\hat{G}_1(\infty) = 0$,

$$\|W(G - G_r)\|_\infty \leq \|G_1 - \hat{G}_1\|_\infty.$$

Deve-se notar novamente que este método é válido qualquer que seja a abordagem adotada para aproximar G_1 . Em particular, se \hat{G}_1 for obtido através de redução balanceada ou aproximação Hankel-ótima tem-se

$$\|W(G - G_r)\|_\infty \leq 2(\sigma_{k+1} + \dots + \sigma_n).$$

4.4 Redução de controladores

A utilização dos métodos propostos neste capítulo no caso de redução de controladores é um procedimento simples mas que necessita de uma manipulação bastante engenhosa. Nesta seção será mostrado como uma análise em termos da perturbação causada pela substituição do controlador por sua versão de ordem reduzida conduz a um interessante método que prima pela busca da estabilidade.

Tome-se como ponto de partida o sistema da figura 4.2 onde está desenhado o sistema original para o qual busca-se um controlador reduzido. Obviamente, supõe-se que este sistema, como um todo, é estável.

Em seguida, como mostrado na figura 4.3, o controlador original é substituído pela sua versão reduzida. Sobre este sistema pergunta-se que condições asseguram

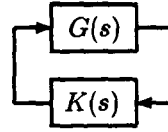


Figura 4.2: Sistema em malha fechada: Planta + Controlador

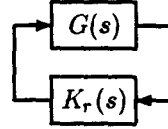


Figura 4.3: Sistema em malha fechada: Planta + Controlador Reduzido

sua estabilidade e, como o controlador reduzido não é conhecido, deseja-se que tais condições dependam somente da planta e do controlador original. Com este fim, nota-se que o controlador da figura 4.3 pode ser substituído como na figura 4.4(a) que, por sua vez, pode ser manipulada adequadamente para chegar ao sistema da figura 4.4(b) onde W é dada por

$$W = (I - GK)^{-1}G = G(I - KG)^{-1}.$$

Segundo Doyle e Stein (ref. [15]), as condições para que o sistema destas figuras (4.3 e 4.4) seja estável são

1. K e K_r têm o mesmo número de pólos em \mathbb{C}^+ .
2. Sobre o eixo imaginário, K e K_r têm pólos idênticos com os mesmos resíduos.
3. W é estável.
4. Pelo menos uma das equações 4.4 e 4.5 é satisfeita:

$$\|(K_r - K)W\|_\infty < 1. \quad (4.4)$$

$$\|W(K_r - K)\|_\infty < 1 \quad (4.5)$$

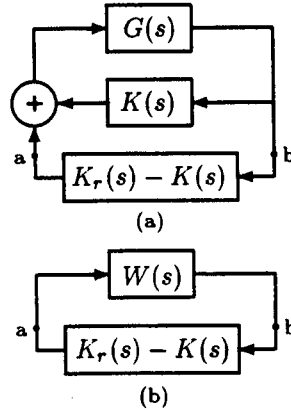


Figura 4.4: Relação entre redução do controlador e redução ponderada

Estas condições constituem uma pequena extensão do *teorema do pequeno ganho* (ref. [15]). Infelizmente, é muito difícil minimizar as normas dadas nas equações 4.4 e 4.5 no caso geral e assim garantir que sejam menores que a unidade. Todavia, é possível utilizar os métodos de redução ponderada apresentados neste capítulo para tentar fazer com que uma dessas normas assuma um valor bem próximo do mínimo. Quando se utiliza a equação 4.4 ou a equação 4.5 o método é conhecido como sendo ponderado pela entrada ou pela saída.

É importante notar ainda que o método da norma Hankel precisa de ponderações anti-estáveis, mínimas e que tenham todos os seus zeros no semi-plano direito. A utilização no caso de redução de controladores pode ser feita utilizando uma realização mínima de $W(-s)$ como ponderação anti-estável. Ainda assim, $W(s)$ precisaria ser fase mínima² o que nem sempre é verdade. O método apresentado no capítulo 5 não sofre deste problema assim como o método utilizando a forma balanceada apresentado na seção 4.1.

²Como notado anteriormente, esta restrição pode ser relaxada e está relacionada com a proibição de que um zeros da ponderação seja também pólo da aproximação Hankel-ótima

4.5 Ponderações úteis

O estudo de ponderações em frequência que possam ser utilizadas para redução de controladores assim como outros métodos de redução ponderada que possuam limitantes superiores fáceis de calcular representam outro ramo da teoria de redução de sistemas.

Algumas das ponderações propostas estão reunidas em [4] e definem critérios para os quais se busca um mínimo. Entre esses critérios estão

$$J_n = \|(K - K_r)V\|_\infty$$

$$J_c = \|(I - GK)^{-1}G(K - K_r)(I - GK)^{-1}\|_\infty$$

$$J'_c = \|(I - GK)^{-1}G(K - K_r)(I - GK)^{-1}\hat{V}\|_\infty$$

onde a dependência de $j\omega$ está implícita e V e \hat{V} são definidas como as fatorações dos espectros dos sinais de erro (Φ_q) e de entrada (Φ_u) em um controlador LQG:

$$\Phi_q(j\omega) = V(j\omega)V'(-j\omega)$$

$$\Phi_u(j\omega) = \hat{V}(j\omega)\hat{V}'(-j\omega).$$

Em [18], Goddard e Glover apresentam um método para calcular ponderações W_1 e W_2 tais que, dado um controlador K que estabilize a planta G , a obtenção de um controlador reduzido K_r satisfazendo

$$\|W_1^{-1}(K - K_r)W_2^{-1}\|_\infty < 1$$

garante que ele também estabiliza a planta. Embora tais ponderações também sejam boas no sentido da manutenção da performance, sua obtenção é relativamente complicada se comparada com as anteriores ou com os outros métodos deste trabalho.

Paralelamente à busca de ponderações mais eficazes, outros métodos de redução ponderada se desenvolveram com o intuito de possibilitar a obtenção de limitantes superiores para o erro em frequência.

Um destes métodos é apresentado em [1] por Al-Saggaf e Franklin contemplando especialmente o caso discreto mas estendido ao caso contínuo. Basicamente, é um método de redução balanceada ponderada no qual requer-se da ponderação que tenha ordem igual ao número de entradas do sistema.

Entre os métodos mais pesquisados atualmente encontra-se um que é denominado *Truncamento Estocástico Balanceado* ou simplesmente BST. Este método inspirou o uso de ponderações as mais diversas envolvendo algum tipo de matriz de transferência inversa à do sistema. Nestes métodos dois tipos de erros são analisados: o erro *relativo*

$$E_{\text{rel}} \triangleq G^+(G_r - G)$$

e o erro *multiplicativo*

$$E_{\text{mul}} \triangleq G_r^+(G - G_r)$$

onde G^+ é uma inversa pela direita de G . Como exemplos de estudos sobre este método podem ser citados os trabalhos de Zhou (ref. [45]) estendendo-o para plantas não-quadradas e de Gu (ref. [20]) estabelecendo um método similar chamado IWBT ou *Truncamento Balanceado com Ponderação Inversa*.

Capítulo 5

A abordagem por fatorações coprimas

Desde que Nett, Jacobson e Balas (ref. [31]) estabeleceram uma conexão clara entre as representações de estados e por frações coprimas de uma função de transferência, a abordagem dos problemas de controle através de fatorações passou a encontrar cada vez mais aplicações. Com o trabalho de Anderson e Liu em uma série de publicações ([26], [3], [28] e [4]), a teoria de redução de modelos também utilizou-se das facilidades provenientes destas representações. Uma contribuição desta abordagem foi uma nova metodologia para aproximar funções de transferência de sistemas instáveis.

Uma boa descrição da teoria das fatorações pode ser encontrada em [40], embora não se requeira tamanho conhecimento do assunto para entender esta aplicação específica. Algumas definições destinadas a estabelecer a terminologia e as propriedades que motivaram o surgimento deste novo método serão apresentadas nas seções seguintes. Nas seções 5.2.1 e 5.2.3, as fatorações serão aplicadas ao problema da redução de modelo e ver-se-á que a sua solução mantém a simplicidade dos métodos anteriores.

Cabe ressaltar que este método é em essência uma aplicação da teoria das realizações balanceadas com ponderações. Assim, para buscar um controlador reduzido que mantenha estabilidade do sistema, uma classe especial de ponderações será introduzida, resultando algumas vantagens tanto ao nível de formulação como de implementação.

Fatoração coprima é uma maneira de representar matrizes de funções de transferência usando duas outras funções. Embora o termo *fatoração* seja geral, fatorações coprimas estão relacionadas exclusivamente com a representação de uma função através de uma divisão e são, por isso, chamadas frações coprimas. No decorrer deste capítulo, muitos termos específicos a esta teoria serão utilizados mas, não sendo o objetivo sua apresentação detalhada, os principais serão colocados informalmente recorrendo-se a uma vaga analogia com representações mais conhecidas. O leitor interessado pode recorrer a [40] onde encontrará definições mais rigorosas.

A primeira definição pertinente é a de fração de uma matriz de funções de transferência. De uma maneira simplificada, este tipo de fatoração consiste em representar uma matriz de funções de transferência como a divisão de duas matrizes racionais, próprias e estáveis. Assim, denotando por $\mathbb{R}(s)$ o espaço das matrizes racionais, próprias e estáveis tem-se que o par ordenado $(N(s), D(s))$ é uma representação fatorada da função de transferência $G(s)$ se $N(s) \in \mathbb{R}(s)$, $D(s) \in \mathbb{R}(s)$ e $G(s) = N(s)D^{-1}(s)$ ou $G(s) = D^{-1}(s)N(s)$. N e D formam uma fatoração de G pela direita no primeiro caso e pela esquerda no segundo. Note-se que D deve ser não-singular.

A definição de frações coprimas pode ser comparada à forma mais “simples” de uma fração $\frac{n(s)}{d(s)}$: uma representação fatorada pela direita $N(s)D^{-1}(s)$ é coprima se for a forma mais “simples” de representar $G(s)$. A noção de “simplicidade” de uma representação fatorada está ligada à definição de *matrizes unimodulares* e de *máximo denominador comum*. Novamente, [40] é a referência recomendada.

5.1 Resultados preliminares

Esta seção dedica-se à exposição de alguns resultados colhidos principalmente em [40] e que servem de motivação para esta abordagem. Desta referência, sabe-se que toda matriz racional $G(s)$ tem uma fatoração coprime pela direita $G(s) = N(s)D^{-1}(s)$ onde $N(s)$ e $D(s)$ são racionais, próprias, estáveis e coprimas pela direita e $D(s)$ é não-singular.

O primeiro resultado importante desta seção refere-se à representação em variáveis de estado da fatoração coprime de $G(s)$. Considere-se a figura 5.1 com G e K dados por

$$G(s) = C_p(sI - A_p)^{-1}B_p$$

$$K(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c.$$

O teorema seguinte foi provado em [31] e [40] e fornece a conexão desejada entre as representações por fatores coprimos e por variáveis de estado.

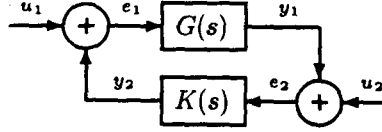


Figura 5.1: Diagrama padrão de realimentação

Teorema 5.1 ([31], [40]) *Supõe-se que $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ seja uma matriz de função de transferência $p \times m$ e que os pares (C, A) e (A, B) sejam detectável e estabilizável, respectivamente. Escolhendo duas matrizes F e L tais que $A - BF$ e $A - LC$ sejam Hurwitz, definem-se:*

$$N(s) = C(sI - A + BF)^{-1}B \quad D(s) = I - F(sI - A + BF)^{-1}B \quad (5.1)$$

$$U(s) = F(sI - A + LC)^{-1}L \quad V(s) = I + F(sI - A + LC)^{-1}B \quad (5.2)$$

$$\bar{D}(s) = I - C(sI - A + LC)^{-1}L \quad \bar{N}(s) = C(sI - A + LC)^{-1}B \quad (5.3)$$

$$\bar{V}(s) = I + C(sI - A + BF)^{-1}L \quad \bar{U}(s) = F(sI - A + BF)^{-1}L \quad (5.4)$$

Então:

1. Todas as matrizes acima são estáveis

2. $D(s)$ e $\bar{D}(s)$ são não-singulares

3. $G(s) = N(s)D^{-1}(s) = \bar{D}^{-1}(s)\bar{N}(s)$

$$4. \quad \begin{bmatrix} V(s) & U(s) \\ -\bar{N}(s) & \bar{D}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(s) & -\bar{U}(s) \\ N(s) & \bar{V}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

A equação 5.5 requer especial atenção pois mostra que N e D são coprimas usando um resultado conhecido como *Identidade de Bezout*. Ao mesmo tempo, se L e F definem um controlador com a forma

$$K(s) = F(sI - A + BF + LC)^{-1}L$$

então

$$K(s) = \bar{U}(s)\bar{V}^{-1}(s) = V^{-1}(s)U(s)$$

são fatorações coprimas de $K(s)$ com $V(s)$ e $\bar{V}(s)$ não-singulares. Um controlador com esta estrutura pode, por exemplo, ser obtido através de um projeto LQG. Note-se finalmente que as condições de estabilizabilidade e detectabilidade garantem, respectivamente, a existência de F e L tais que $A - BF$ e $A - LC$ são Hurwitz.

Dois pontos são importantes para redução de controladores: estabilidade e performance. Os próximos resultados indicam de que forma estabilidade e performance serão avaliadas na próxima seção.

Quanto à estabilidade, lembrando a seção 4.4 e dado que G é controlado por K de modo que o sistema total é estável, K_r substitui K e a mantém se

$$\rho \triangleq \|(K_r - K)W\|_\infty < 1 \quad (5.6)$$

ou se

$$\bar{\rho} \triangleq \|\bar{W}(K_r - K)\|_\infty < 1 \quad (5.7)$$

onde $W = G(I - KG)^{-1}$ e $\bar{W} = (I - GK)^{-1}G$, conforme equações 4.4 e 4.5. Posteriormente, este resultado será utilizado para reduzir um outro sistema ($\Gamma(s)$) ao invés de $K(s)$.

Para concluir esta seção, apresentam-se duas matrizes de função de transferência relativas ao sistema da figura 5.1 que são importantes indicativos da sua estabilidade e, principalmente, da sua performance e robustez. Elas são $H_1(s)$ e $H_2(s)$ e satisfazem

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = H_1(G, K) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = H_2(G, K) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

As matrizes em questão são facilmente identificáveis a partir da figura 5.1 (usando, segundo [40], a propriedade $U(I + TU)^{-1} = (I + UT)^{-1}U$ como sendo

$$H_1(G, K) = \begin{bmatrix} (I - KG)^{-1} & K(I - GK)^{-1} \\ G(I - KG)^{-1} & (I - GK)^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

e

$$H_2(G, K) = \begin{bmatrix} (I - GK)^{-1}G & (I - GK)^{-1}GK \\ K(I - GK)^{-1}G & K(I - GK)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

5.1.1 Estabilidade, performance e ponderações em frequência

O que se segue está organizado da seguinte forma. Primeiro será apresentada uma nova representação do controlador baseada nas fatorações pela esquerda e pela direita e que conduzirá a interessantes resultados sobre a estabilidade do sistema em malha fechada com o controlador original substituído por sua versão reduzida. O desenvolvimento apresentado nesta seção foi amplamente inspirado em [28] e [7].

Após o desenvolvimento da nova abordagem, um teorema mostra como a redução dos fatores do controlador pode levar a bons resultados no que diz respeito a performance e robustez do sistema.

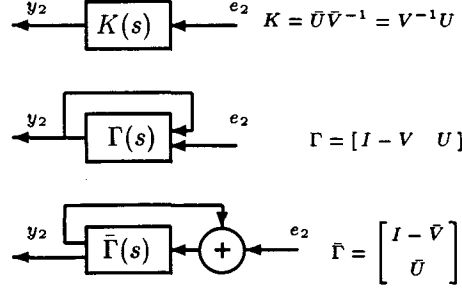


Figura 5.2: Três representações alternativas do controlador $K(s)$

Adaptando o teorema 5.1 para representar o controlador e supondo que o par (A_c, B_c) é estabilizável (respectivamente (C_c, A_c) é detectável), pode-se encontrar uma matriz F_c (resp. L_c) tal que $\forall i, \lambda_i(A_c - B_c F_c) \in \mathbb{C}_-$ (resp. $\lambda_i(A_c - L_c C_c) \in \mathbb{C}_-$). Assim, as seguintes equações são válidas

$$K(s) = \bar{U}\bar{V}^{-1}$$

$$K(s) = V^{-1}U$$

onde¹

$$\bar{U} = C_c(sI - A_c + B_c F_c)^{-1} B_c \quad (5.10)$$

$$\bar{V} = I - F_c(sI - A_c + B_c F_c)^{-1} B_c \quad (5.11)$$

$$V = I - C_c(sI - A_c + L_c C_c)^{-1} L_c \quad (5.12)$$

$$U = C_c(sI - A_c + L_c C_c)^{-1} B_c \quad (5.13)$$

e tanto V quanto \bar{V} são não-singulares. Observe-se também que todas as equações definem matrizes de funções de transferência estáveis.

¹É imperativo notar que as matrizes \bar{U} e \bar{V} correspondem a N e D no teorema 5.1, uma vez que aquele teorema está sendo usado para representar o controlador

A fim de proceder a redução do controlador, suas formas fatoradas serão utilizadas para representá-lo de acordo com a figura 5.2. As figuras 5.3 e 5.4 mostram sistemas equivalentes onde Γ e $\bar{\Gamma}$ são os objetos do processo de redução. Em outras palavras, não mais se estará aproximando $K(s)$ diretamente mas através de Γ ou $\bar{\Gamma}$, conforme a figura 5.2. A grande vantagem desta abordagem é que ela está livre da necessidade de manter no controlador reduzido o mesmo número de pólos instáveis que havia no controlador original. Já que Γ é estável, basta garantir a equação 5.6 (ou 5.7) e o sistema será estável mesmo que K e K_r tenham número diferente de pólos no semi-plano direito. O preço a ser pago por isso será, provavelmente, uma maior dificuldade em encontrar controladores de ordem muito reduzida.

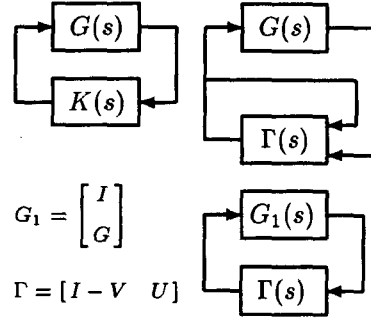
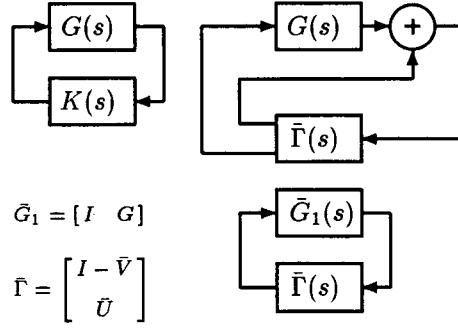


Figura 5.3: Representações equivalentes usando *fatoração coprime pela esquerda*

Aplicando os resultados da seção 4.4 às figuras 5.3 e 5.4 fica-se sabendo que, dado um sistema $G_1(s)$ e um controlador $\Gamma(s)$ que o estabiliza, também $\Gamma_r(s)$ estabilizará $G_1(s)$ se uma das equações 5.6 e 5.7 for satisfeita, substituindo K por Γ ou $\bar{\Gamma}$ com

$$\begin{aligned}
 W &= G_1(I - \Gamma G_1)^{-1} = \begin{bmatrix} I \\ G \end{bmatrix} (V - UG)^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} I \\ G \end{bmatrix} (V(I - V^{-1}UG))^{-1} = \begin{bmatrix} I \\ G \end{bmatrix} (I - KG)^{-1}V^{-1}
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Figura 5.4: Representações equivalentes usando *fatoração coprima pela direita*

e

$$\begin{aligned}
 \bar{W} &= (I - \tilde{G}_1 \bar{\Gamma})^{-1} \tilde{G}_1 = (\bar{V} - G\bar{U})^{-1} [I \ G] \\
 &= ((I - G\bar{U}\bar{V}^{-1})\bar{V})^{-1} [I \ G] = \bar{V}^{-1}(I - GK)^{-1} [I \ G].
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Agora é necessário encontrar realizações em variáveis de estado para W e \bar{W} . O teorema 5.2 fornece tais realizações.

Teorema 5.2 *Sejam $G(s)$ e $K(s)$ como na figura 5.1. As ponderações $W(s)$ e $\bar{W}(s)$ possuem realizações dadas por*

$$W(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_p & B_p C_c & B_p \\ B_c C_p & A_c & L_c \\ \hline 0 & C_c & I \\ C_p & 0 & 0 \end{array} \right].$$

e

$$\bar{W}(s) = \left[\begin{array}{cc|cc} A_p & B_p C_c & 0 & B_p \\ B_c C_p & A_c & B_c & 0 \\ \hline C_p & F_c & I & 0 \end{array} \right].$$

Prova. A prova deste teorema é bastante simples apesar de longa. Primeiro,

escreve-se $W = W_0 V^{-1}$ e $\bar{W} = \bar{V}^{-1} \bar{W}_0$ e, da figura 5.1, nota-se que

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = W_0 u_1 \quad \text{com } u_2 = 0 \quad (5.16)$$

$$e_2 = \bar{W}_0 \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

As representações em variáveis de estado para W_0 e \bar{W}_0 podem ser obtidas por

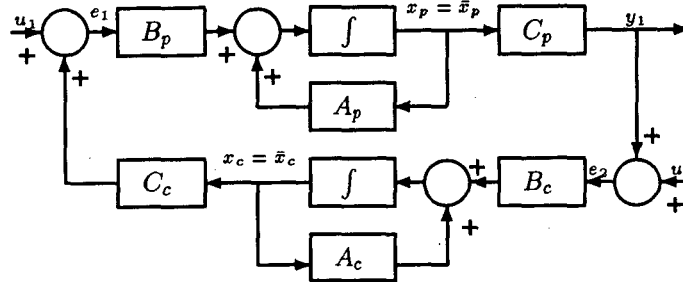


Figura 5.5: Sistema em Malha Fechada

inspeção à figura 5.5 e são

$$W_0 = \left[\begin{array}{cc|c} A_p & B_p C_c & B_p \\ B_c C_p & A_c & 0 \\ \hline 0 & C_c & I \\ C_p & 0 & 0 \end{array} \right]$$

e

$$\bar{W}_0 = \left[\begin{array}{cc|cc} A_p & B_p C_c & 0 & B_p \\ B_c C_p & A_c & B_c & 0 \\ \hline C_p & 0 & I & 0 \end{array} \right].$$

A partir da fórmula para inversão de funções de transferência de [9] (ver também seção 1.2) tem-se

$$V^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_c & L_c \\ \hline C_c & I \end{array} \right]$$

e

$$\bar{V}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline F_c & I \end{array} \right].$$

Nas equações acima nota-se a natureza dual de W e \bar{W} e, por isso, somente a equação para \bar{W} (Fatoração Coprima pela Direita, $K = \bar{U}\bar{V}^{-1}$) será demonstrada. W segue de maneira inteiramente análoga.

Escrevendo $\bar{W} = \bar{V}^{-1}\bar{W}_0$ como

$$\bar{W} = \left[\begin{array}{ccc|cc} A_p & B_p C_c & 0 & 0 & B_p \\ B_c C_p & A_c & 0 & B_c & 0 \\ B_c C_p & 0 & A_c & B_c & 0 \\ \hline C_p & 0 & F_c & I & 0 \end{array} \right]$$

pode-se notar que obtém-se uma realização que não é mínima. Aplicando a transformação

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & I & I \end{bmatrix} \hat{x}$$

onde $\bar{x} = [\bar{x}_p \quad \bar{x}_c \quad \bar{x}_v]^T$, chega-se a realização

$$\bar{W} = \left[\begin{array}{ccc|cc} A_p & B_p C_c & 0 & 0 & B_p \\ B_c C_p & A_c & 0 & B_c & 0 \\ 0 & 0 & A_c & 0 & 0 \\ \hline C_p & F_c & F_c & I & 0 \end{array} \right].$$

da qual pode-se remover o terceiro conjunto de estados (não-controláveis). ■

Agora, considere-se novamente as equações 5.8 e 5.9. O seguinte teorema fornece uma idéia do que acontecerá com as matrizes H_1 e H_2 quando Γ ou $\bar{\Gamma}$ for substituída por Γ_r ou $\bar{\Gamma}_r$.

Teorema 5.3 *Sejam H_1 e H_2 definidas por 5.8 e 5.9 e Γ e $\bar{\Gamma}$ como na figura 5.2.*

Então:

$$\|H_1 - H_{1r}\|_\infty = \|(\bar{\Gamma} - \bar{\Gamma}_r)\bar{W}\|_\infty \quad (5.18)$$

e

$$\|H_2 - H_{2r}\|_\infty = \|W(\Gamma - \Gamma_r)\|_\infty \quad (5.19)$$

Prova. Primeiro, é necessário definir

$$\begin{aligned} T_1(G, K) &\triangleq \begin{bmatrix} K(I - GK)^{-1}G & K(I - GK)^{-1} \\ (I - GK)^{-1}G & (I - GK)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I - GK)^{-1} [G \ I] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_2(G, K) &\triangleq \begin{bmatrix} G(I - KG)^{-1} & G(I - KG)^{-1}K \\ (I - KG)^{-1} & (I - KG)^{-1}K \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G \\ I \end{bmatrix} (I - KG)^{-1} [I \ K]. \end{aligned}$$

Agora, note-se que

$$\begin{aligned} H_1 &= T_1 + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ H_2 &= T_2 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned} K(I - GK)^{-1}G + I &= (I - KG)^{-1}KG + I \\ &= (I - KG)^{-1}(KG + I - KG) = (I + KG)^{-1} \end{aligned}$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} W &= \begin{bmatrix} I \\ G \end{bmatrix} (I - KG)^{-1} V^{-1} \\ \bar{W} &= \bar{V}^{-1} (I - GK)^{-1} [I \ G] \\ K &= \bar{U} \bar{V}^{-1} \\ K &= V^{-1} U \end{aligned}$$

e fazendo as devidas substituições, pode-se escrever

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \end{bmatrix} \bar{W} \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \\ T_2 &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} V & U \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tomando-se as diferenças

$$\begin{aligned} H_1 - H_{1r} = T_1 - T_{1r} &= \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{V} + \bar{V}_r \\ \bar{U} - \bar{U}_r \end{bmatrix} \bar{W} \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \\ H_2 - H_{2r} = T_2 - T_{2r} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} -V + V_r & U - U_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donde seguem-se as equações 5.18 e 5.19 através da aplicação da norma, remoção das matrizes unitárias e substituição de $\begin{bmatrix} -\bar{V} + \bar{V}_r \\ \bar{U} - \bar{U}_r \end{bmatrix}$ por $\bar{\Gamma} - \bar{\Gamma}_r$ e de $\begin{bmatrix} -V + V_r & U - U_r \end{bmatrix}$ por $\Gamma - \Gamma_r$. ■

5.2 Redução de modelos

A despeito do título, esta seção concentra-se muito mais no problema da redução de controladores do que na aproximação de uma sistema linear qualquer. Embora seja possível aproximar D e N a fim de reduzir G , isso nem sempre é interessante uma vez que D e N só se definem após a resolução de dois problemas de posicionamento de pólos (cálculo de F e L) cuja complexidade equivale ao projeto de um controlador LQG.

Apenas para completar a exposição destaca-se a possibilidade de reduzir D e N simultaneamente (ref. [26]) conseguindo, assim, abordar o problema da instabilidade de G (pois N e D são estáveis). Para tanto, escreve-se

$$J(s) = \begin{bmatrix} N(s) \\ D(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(sI - A + BF)^{-1}B \\ I - F(sI - A + BF)^{-1}B \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \\ -F \end{bmatrix} (sI - A + BF)^{-1} B \\
&= D_J + C_J(sI - A_J)^{-1} B_J
\end{aligned}$$

e reduz-se $J(s)$. Se, por exemplo, o método escolhido for balancear e truncar então

$$\left\| \begin{bmatrix} N(s) - N_r(s) \\ D(s) - D_r(s) \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = \|J(s) - J_r(s)\|_{\infty} \leq 2\text{tr}(\Sigma_2)$$

Evidentemente, poder-se-ia utilizar a representação coprime pela esquerda com $G(s) = \bar{D}^{-1} \bar{N}$.

O principal ponto desta seção refere-se à aproximação do controlador. É nítida a possibilidade de utilizar o método descrito acima e que será chamado *fatoração coprime pela direita (esquerda) sem ponderação*², mas vale a pena estudar a possibilidade de introduzir ponderações no processo.

Sob o ponto de vista do desempenho, como lembrado em [3], o único peso que se deveria introduzir pode ser representado por uma matriz constante destinada a normalizar o espectro do chamado sinal de inovação do controlador LQG. O uso de ponderações em frequência, entretanto, ainda é atraente do ponto de vista de manutenção da estabilidade ou de aproximação da função de transferência ou, claro, quando o controlador não advém de um projeto LQG.

Os métodos descritos a seguir são, na realidade, subdivididos em dois. Quando se utiliza $K(s) = V^{-1}U$ tem-se o método que faz uso de *fatorações coprimas pela esquerda com ponderação*. Analogamente, o método das *fatorações coprimas pela direita com ponderação* é obtido quando se parte de $K(s) = \bar{U}\bar{V}^{-1}$. O objetivo de ambos os métodos é tentar encontrar um controlador reduzido (que pelo menos mantenha a estabilidade do sistema) lançando mão das equações 5.6 ou 5.7. Embora não seja fácil minimizar ρ ou $\bar{\rho}$, pode-se utilizar, por exemplo, um dos

²No caso de redução da planta, a fatoração pela esquerda é indicada através das barras ($\bar{D}^{-1}\bar{N}$) ao contrário do que acontece com a redução do controlador onde elas indicam a fatoração pela direita ($\bar{U}\bar{V}^{-1}$).

métodos do capítulo 4 para conseguir uma boa aproximação com pequeno custo computacional. Ainda é interessante notar em vista das equações 5.18 e 5.19 que uma aproximação suficientemente boa de Γ ou $\bar{\Gamma}$, além de garantir estabilidade, produz pequeno desvio de H_{1r} e H_{2r} em relação a H_1 e H_2 .

5.2.1 Via balanceamento

Uma das derivações que podem ser seguidas a partir do teorema 5.2 consiste em aproximar $\bar{W}(\bar{\Gamma}_r - \bar{\Gamma})$ seguindo o método de Enns (ref. [16] e capítulo 4). Para chegar a este objetivo é necessário construir uma realização de $\bar{W}\bar{\Gamma}$. Partindo do resultado daquele teorema

$$\bar{W}(s) = \left[\begin{array}{cc|cc} A_p & B_p C_c & 0 & B_p \\ B_c C_p & A_c & B_c & 0 \\ \hline C_p & F_c & I & 0 \end{array} \right]$$

e observando que

$$\bar{\Gamma} = \left[\begin{array}{c} I - \bar{V} \\ \bar{U} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_c - B_c F_c & B_c \\ \hline F_c & 0 \\ C_c & 0 \end{array} \right]$$

imediatamente constrói-se $\bar{W}\bar{\Gamma}$ como

$$\bar{W}\bar{\Gamma} = \left[\begin{array}{ccc|c} A_c - B_c F_c & 0 & 0 & B_c \\ B_p C_c & A_p & B_p C_c & 0 \\ B_c F_c & B_c C_p & A_c & 0 \\ \hline F_c & C_p & F_c & 0 \end{array} \right]. \quad (5.20)$$

A partir desta equação, construir-se-á um algoritmo que, ao ser aplicado, produz uma realização balanceada ponderada. Esta, por sua vez, poderá ser truncada para produzir um controlador reduzido.

Para calcular a realização balanceada ponderada somente os grammianos ponderados \bar{P}_w e \bar{Q}_w precisam ser calculados. Em termos dos grammianos do sistema

da equação 5.20 (\bar{P} e \bar{Q}) os grammianos ponderados são submatrizes dadas por

$$P_w = [I_{n_c} \ 0 \ 0] \bar{P} \begin{bmatrix} I_{n_c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$Q_w = [I_{n_c} \ 0 \ 0] \bar{Q} \begin{bmatrix} I_{n_c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

onde n_c é a ordem do controlador.

Para facilitar a notação escreve-se o sistema da equação 5.20 como

$$\bar{W}\bar{I} = \left[\begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{B} \\ \hline \bar{C} & 0 \end{array} \right]$$

e denota-se o conjunto de variáveis de estado por \bar{x} .

Embora este sistema tenha ordem $n_p + 2n_c$, ver-se-á que \bar{P}_w e \bar{Q}_w podem ser calculados a partir de equações mais simples. Primeiro, é fácil mostrar que \bar{P}_w satisfaz

$$(A_c - B_c F_c) \bar{P}_w + \bar{P}_w (A_c - B_c F_c)^T + B_c B_c^T = 0$$

simplesmente escrevendo

$$\bar{A} \bar{P} + \bar{P} \bar{A}^T + \bar{B} \bar{B}^T = 0.$$

e tomando a equação referente ao bloco superior esquerdo.

O cálculo de \bar{Q}_w é um pouco mais difícil. Antes de resolver

$$\bar{A}^T \bar{Q} + \bar{Q} \bar{A} + \bar{C}^T \bar{C} = 0,$$

deve-se aplicar a transformação

$$\bar{x} = T \tilde{x} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -I & 0 & I \end{bmatrix} \tilde{x}$$

ao sistema, de modo a obter

$$\bar{W}\bar{\Gamma} = \left[\begin{array}{ccc|c} A_c - B_c F_c & 0 & 0 & B_c \\ 0 & A_p & B_p C_c & 0 \\ 0 & B_c C_p & A_c & B_c \\ \hline 0 & C_p & F_c & 0 \end{array} \right] \quad (5.21)$$

Essa mesma transformação mapeia o grammiano de observabilidade assim:

$$\bar{Q} = T^{-T} \tilde{Q} T^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_3 + \tilde{Q}_3^T + \tilde{Q}_6 & * & * \\ & * & * \\ & * & * \end{bmatrix}$$

onde

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 & \tilde{Q}_2 & \tilde{Q}_3 \\ \tilde{Q}_2^T & \tilde{Q}_4 & \tilde{Q}_5 \\ \tilde{Q}_3^T & \tilde{Q}_5^T & \tilde{Q}_6 \end{bmatrix}$$

e as componentes marcadas com um asterisco são irrelevantes uma vez que só interessa calcular o canto superior esquerdo

$$\bar{Q}_w = \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_3 + \tilde{Q}_3^T + \tilde{Q}_6.$$

A partir da equação de Lyapunov relativa ao sistema transformado chega-se a três equações de menor ordem:

$$(A_c - B_c F_c)^T \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_1 (A_c - B_c F_c) = 0 \quad (5.22)$$

$$(A_c - B_c F_c)^T [\tilde{Q}_2 \quad \tilde{Q}_3] + [\tilde{Q}_2 \quad \tilde{Q}_3] A_{cl} = 0 \quad (5.23)$$

$$A_{cl}^T Q_{cl} + Q_{cl} A_{cl} + \begin{bmatrix} C_p^T \\ F_c^T \end{bmatrix} [C_p \quad F_c] = 0 \quad (5.24)$$

onde

$$Q_{cl} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_4 & \tilde{Q}_5 \\ \tilde{Q}_5^T & \tilde{Q}_6 \end{bmatrix}, \quad A_{cl} = \begin{bmatrix} A_p & B_p C_c \\ B_c C_p & A_c \end{bmatrix}.$$

É importante notar que tanto $(A_c - B_c F_c)$ quanto A_{cl} são matrizes Hurwitz.

A primeira porque F_c foi escolhido com este fim; a segunda por ser exatamente

a matriz do sistema em malha fechada (quando $K(s)$ é utilizado para controlar $G(s)$, como na figura 5.1). Levando isso em conta, e usando os resultados de [5] referentes à unicidade da solução das equações de Sylvester, conclui-se que \tilde{Q}_1 e $[\tilde{Q}_2 \ \tilde{Q}_3]$ nas equações 5.22 e 5.23 são nulas.

Uma vez que $\tilde{Q}_1 = 0$ e $\tilde{Q}_3 = 0$, o mero ato de resolver a equação 5.24 é suficiente para encontrar $\tilde{Q}_w (= \tilde{Q}_6)$.

Antes de proceder a adaptação dos resultados mais importantes para os casos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ cabe resumi-los. Se o controlador for estabilizável a existência de F_c é garantida e o *Método da Fatoração Coprima pela Direita* é aplicável através dos seguintes passos.

1. Encontrar F_c tal que $\forall i, \lambda_i(A_c - B_c F_c) \in \mathbb{C}_-$ usando, por exemplo, LQG ou alguma técnica de posicionamento de pólos.
2. Construir \bar{U} e \bar{V} para que $K = \bar{U}\bar{V}^{-1}$:

$$\bar{U} = C_c(sI - A_c + B_c F_c)^{-1} B_c$$

$$\bar{V} = I - F_c(sI - A_c + B_c F_c)^{-1} B_c$$

3. Resolver a equação de Lyapunov para \bar{P}_w

$$(A_c - B_c F_c) \bar{P}_w + \bar{P}_w (A_c - B_c F_c)^T + B_c B_c^T = 0.$$

4. Resolver a equação de Lyapunov para \tilde{Q}_w

$$A_{cl}^T Q_{cl} + Q_{cl} A_{cl} + \begin{bmatrix} C_p^T \\ F_c^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_p & F_c \end{bmatrix} = 0$$

com

$$Q_{cl} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_4 & \tilde{Q}_5 \\ \tilde{Q}_5^T & \tilde{Q}_w \end{bmatrix}, \quad A_{cl} = \begin{bmatrix} A_p & B_p C_c \\ B_c C_p & A_c \end{bmatrix}.$$

5. Encontrar \bar{T} tal que

$$\bar{T}^{-1} \bar{P}_w \bar{T}^{-T} = \text{diag}\{\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n\} = \bar{T}^T \tilde{Q}_w \bar{T}$$

com $\bar{\sigma}_i \geq \bar{\sigma}_{i+1}, \forall i$.

6. O controlador balanceado é dado por

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} \bar{T}^{-1}A_c\bar{T} & \bar{T}^{-1}B_c \\ \hline C_c\bar{T} & 0 \end{array} \right].$$

Um procedimento similar (*Método da Fatoração Coprima pela Esquerda*) pode ser aplicado se o controlador for detectável.

1. Encontrar L_c tal que $\forall i, \lambda_i(A_c - L_c C_c) \in \mathbb{C}_-$ usando, por exemplo, LQG ou alguma técnica de posicionamento de pólos.
2. Construir U e V para que $K = V^{-1}U$:

$$V = I - C_c(sI - A_c + L_c C_c)^{-1} L_c$$

$$U = C_c(sI - A_c + L_c C_c)^{-1} B_c$$

3. Resolver a equação de Lyapunov para Q_w

$$(A_c - L_c C_c)^T Q_w + Q_w (A_c - L_c C_c) + C_c^T C_c = 0.$$

4. Resolver a equação de Lyapunov para P_w

$$A_{cl} P_{cl} + P_{cl} A_{cl}^T + \begin{bmatrix} B_p \\ L_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_p^T & L_c^T \end{bmatrix} = 0$$

com

$$P_{cl} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_4 & \tilde{P}_5 \\ \tilde{P}_5^T & P_w \end{bmatrix}, \quad A_{cl} = \begin{bmatrix} A_p & B_p C_c \\ B_c C_p & A_c \end{bmatrix}.$$

5. Encontrar T tal que

$$T^{-1} P_w T^{-T} = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} = T^T Q_w T$$

com $\sigma_i \geq \sigma_{i+1}, \forall i$.

6. O controlador balanceado é dado por

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} T^{-1}A_c T & T^{-1}B_c \\ \hline C_c T & 0 \end{array} \right].$$

Finalmente, de posse dos controladores balanceados, a redução segue diretamente pelo simples truncamento dessa representação, ficando apenas os estados relativos a grandes valores de σ_i . Supondo a representação obtida por um dos métodos recém descritos denotada por

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_c & \tilde{B}_c \\ \hline \tilde{C}_c & 0 \end{array} \right],$$

pode-se descrever este truncamento matematicamente escrevendo

$$K_r(s) = \left[\begin{array}{c|c} L^T \tilde{A}_c L & L^T \tilde{B}_c \\ \hline \tilde{C}_c L & 0 \end{array} \right]$$

onde

$$L = \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times r}.$$

5.2.2 Os casos \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 e redução balanceada ponderada

A importância dos controladores \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 na teoria de controle é indiscutível. Como mencionado anteriormente, o método das fatorações coprimas foi estudado em [28] (controladores \mathcal{H}_2) e [7] (controladores \mathcal{H}_∞). Apenas para referência, é muito simples mostrar que os resultados desses trabalhos são casos particulares da abordagem aqui apresentada.

Caso \mathcal{H}_∞ : Se o controlador que está para ser reduzido é produto de uma metodologia \mathcal{H}_∞ e a planta (A_p, B_p, C_p) está representada por (A, B_2, C_2) então a escolha de

$$F_c = -C_2$$

$$L_c = B_2$$

satisfaz os requisitos impostos a estas matrizes. Apenas para fins de comparação, os resultados de Chen e Chang (ref. [7]) são conseguidos com o controlador

$$\begin{aligned} A_c &= A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 \\ B_c &= -Z_\infty L_\infty \\ C_c &= F_\infty \end{aligned}$$

Caso \mathcal{H}_2 : Similarmente, no caso LQG, pode-se partir de uma planta dada por (A, B, C) e escolher

$$\begin{aligned} F_c &= C \\ L_c &= -B \end{aligned}$$

A vantagem do controlador ser obtido via LQG é que

$$\begin{aligned} A_c &= A - BF - LC \\ B_c &= -L \\ C_c &= F \end{aligned}$$

e, como mostrado por Liu e Anderson (ref. [28]), as equações dos itens 4 desacoplam e só é necessário resolver

$$(A_c - L_c C_c)^T \bar{Q}_w + \bar{Q}_w (A_c - L_c C_c) + F_c^T F_c = 0$$

no caso pela direita ou

$$(A_c - B_c F_c) P_w + P_w (A_c - B_c F_c)^T + L_c L_c^T = 0.$$

no caso pela esquerda, além, é claro, das respectivas equações dos itens 3. Mostrar que as equações realmente desacoplam é quase trivial e passa pela aplicação de uma transformação do tipo

$$T = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

no caso pela direita e outra similar no caso pela esquerda.

Além dos trabalhos de Liu e Anderson e Chen e Chang, esta abordagem comporta o trabalho de Enns (ref. [16]). Em determinado ponto, o método do descrito na seção 4.4, na sua versão que pondera pela entrada e com $D_c = 0$, resume-se a encontrar o canto superior esquerdo dos grammianos do sistema

$$S_e = KW_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} A_c & B_c C_p & 0 & 0 \\ 0 & A_p & B_p C_c & B_p \\ 0 & B_c C_p & A_c & 0 \\ \hline C_c & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (5.25)$$

onde $W_1 = (I - GK)^{-1}G = G(I - KG)^{-1}$ é a ponderação especificada naquele capítulo. Da mesma forma, antes das simplificações o método da fatoração coprime pela esquerda procura os cantos superiores esquerdos dos grammianos do sistema

$$S_c = \Gamma W_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} A_c - L_c C_c & B_c C_p & L_c C_c & L_c \\ 0 & A_p & B_p C_c & B_p \\ 0 & B_c C_p & A_c & L_c \\ \hline C_c & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (5.26)$$

onde W_2 é a ponderação W do teorema 5.2. Ao analisar as realizações acima fica evidente que fazendo $L_c = 0$ o sistema S_c iguala-se ao sistema S_e . A mesma constatação pode ser feita comparando-se os métodos de Enns pela saída e das fatorações coprimas pela direita tomando-se $F_c = 0$ e $D_c = 0$. Outra maneira de fazer esta relação é considerar $L_c = 0$ e notar que $U(s) = K(s)$ e $V(s) = I$.

5.2.3 Via norma Hankel

Seguindo o exposto anteriormente, poder-se-ia pensar em aproximar $\bar{W}(\bar{\Gamma}_r - \bar{\Gamma})$ através da norma Hankel ao invés de usar o método do capítulo 4. Como será visto a seguir, isso é realmente possível e simples quando se usa a técnica das fatorações coprimas.

O uso de fatorações coprimas facilita a utilização das aproximações Hankel-ótimas ponderadas porque produz ponderações que adaptam-se aos requisitos do

método, o que nem sempre é verdade para o caso do capítulo 4. Aqui, porém, necessita-se da suposição de que o par (A_p, B_p) é estabilizável. Evidentemente, isso é uma restrição bastante fraca.

É útil lembrar agora alguns resultados alcançados anteriormente neste capítulo. Primeiro, o problema coloca-se da seguinte maneira: deseja-se encontrar $\bar{\Gamma}_r$ que minimize

$$\|\bar{W}(\bar{\Gamma}_r - \bar{\Gamma})\|_\infty$$

onde

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} I - \bar{V} \\ \bar{U} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_c - B_c F_c & B_c \\ \hline F_c & 0 \\ C_c & 0 \end{array} \right]$$

$$\bar{W}(s) = \left[\begin{array}{cc|cc} A_p & B_p C_c & 0 & B_p \\ B_c C_p & A_c & B_c & 0 \\ \hline C_p & F_c & I & 0 \end{array} \right]$$

e

$$\bar{W}\bar{\Gamma} = \left[\begin{array}{ccc|c} A_c - B_c F_c & 0 & 0 & B_c \\ B_p C_c & A_p & B_p C_c & 0 \\ B_c F_c & B_c C_p & A_c & 0 \\ \hline F_c & C_p & F_c & 0 \end{array} \right] \quad (5.27)$$

Esta, todavia, não é uma tarefa trivial e a norma Hankel substituirá a norma \mathcal{L}_∞ na expectativa de que esta última resulte aproximadamente mínima.

É claro a partir das equações acima que $\bar{\Gamma}$ e \bar{W} são estáveis. Coloca-se, então, um problema, pois será necessário que a ponderação seja anti-estável. Assim, o problema deverá ser tratado de maneira um pouco modificada, isto é, em lugar de minimizar

$$\|\bar{W}(s)(\bar{\Gamma}_r(s) - \bar{\Gamma}(s))\|_\infty,$$

trabalhar-se-á com

$$\|\bar{W}(-s)(\bar{\Gamma}_r(s) - \bar{\Gamma}(s))\|_\infty$$

Isso não deverá prejudicar a qualidade da aproximação pois, pelo menos no caso de ponderações escalares, como notado em [48], quando se trata de aproximar a norma \mathcal{L}_∞ usando a norma Hankel, a adoção de ponderações anti-estáveis conduz a melhores resultados. Por isso e por conveniência de notação, define-se

$$\bar{W}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_w & B_w \\ \hline C_w & D_w \end{array} \right]$$

e

$$\bar{W}_a(s) = \bar{W}(-s) = \left[\begin{array}{c|c} -A_w & -B_w \\ \hline C_w & D_w \end{array} \right].$$

Além disso, como no capítulo 3, $[\cdot]_-$ denotará o operador “parte estável” e $[\cdot]_+$, o operador “parte anti-estável”.

Suponha-se que $\bar{\Gamma}_1$ é tal que

$$\|[\bar{W}_a \bar{\Gamma}]_- - \bar{\Gamma}_1\|_H$$

é mínima. Isso pode ser conseguido com o procedimento do capítulo 3, ou seja, fazendo $\bar{\Gamma}_1$ uma aproximação Hankel-ótima de ordem k da parte estável de $\bar{W}_a \bar{\Gamma}$. Seja, também, a seguinte realização de $\bar{\Gamma}_1$

$$\bar{\Gamma}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hline \hat{C}_1 & \hat{D}_1 \end{array} \right].$$

O teorema a seguir é equivalente ao apresentado por Zhou em [47] e [48]. Zhou, no entanto, mostra que algumas suposições sobre a ponderação garantem a existência das matrizes X e Y enquanto aqui assume-se que X e Y são conhecidas e um método para encontrá-las, no caso da ponderação \bar{W}_a , será apresentado na sequência (teorema 5.5).

Teorema 5.4 *Sejam duas matrizes X e Y tais que*

$$A_w X + X \hat{A}_1 + B_w Y = 0 \tag{5.28}$$

e

$$C_w X + D_w Y = \hat{C}_1. \quad (5.29)$$

Assim,

$$\bar{\Gamma}_r = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hline Y & 0 \end{array} \right].$$

é uma aproximação Hankel-ótima de Γ ponderada por \bar{W}_a , ou seja,

$$\|\bar{W}_a(\bar{\Gamma} - \bar{\Gamma}_r)\|_H = \sigma_{k+1}([\bar{W}_a \bar{\Gamma}]_-)$$

é mínima.

Prova. Idem àquela encontrada em [48] partindo da suposição que X e Y existem. Ou seja, escreve-se $\bar{W}_a \bar{\Gamma}_r$, dividindo-a em parte estável e parte instável. Para concluir tal divisão é necessário resolver a equação 5.28. Utilizando a equação 5.29, garante-se que a parte estável de $\bar{W}_a \bar{\Gamma}_r$ é igual a $\bar{\Gamma}_1$. O resultado do teorema é encontrado quando se escreve $\|\bar{W}_a \bar{\Gamma} - \bar{W}_a \bar{\Gamma}_r\|_H$ e ignora-se a parte instável. ■

Ainda é preciso provar a existência de X e Y . Trabalho para o próximo teorema.

Teorema 5.5 *As equações 5.28 e 5.29 são solucionadas por*

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

e

$$Y = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 - F_c X_2 \\ -C_c X_2 \end{bmatrix}$$

onde X_2 é a solução de

$$(A_c - B_c F_c) X_2 + X_2 \hat{A}_1 + B_c \hat{C}_1 = 0$$

Prova. Primeiro, note-se que X_2 existe e é única pois $A_c - B_c F_c$ e \hat{A}_1 são matrizes Hurwitz. Agora, para provar que a equação 5.29 é satisfeita basta reescrevê-la

$$\begin{aligned} C_w X + D_w Y &= [C_p \ F_c] \begin{bmatrix} 0 \\ X_2 \end{bmatrix} + [I \ 0] \begin{bmatrix} \hat{C}_1 - F_c X_2 \\ -C_c X_2 \end{bmatrix} \\ &= F_c X_2 + \hat{C}_1 - F_c X_2 = \hat{C}_1 \end{aligned}$$

E, para a equação 5.28,

$$\begin{aligned} A_w X + X \hat{A}_1 + B_w Y &= \\ &= \begin{bmatrix} A_p & B_p C_c \\ B_c C_p & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ X_2 \end{bmatrix} \hat{A}_1 + \begin{bmatrix} 0 & B_p \\ B_c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C}_1 - F_c X_2 \\ -C_c X_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B_p C_c X_2 \\ A_c X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ X_2 \hat{A}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_p C_c X_2 \\ B_c \hat{C}_1 - B_c F_c X_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ (A_c - B_c F_c) X_2 + X_2 \hat{A}_1 + B_c \hat{C}_1 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

onde, na última passagem, usa-se a equação referente a X_2 . ■

O método, então, se resume aos seguintes passos

1. Encontrar $\bar{\Gamma}_1$, a aproximação Hankel-ótima de ordem k de $[\bar{W}_a \bar{\Gamma}]_-$.
2. Montar X e Y como no teorema 5.5.
3. Montar $\bar{\Gamma}_r$ como no teorema 5.4.
4. Encontrar o controlador reduzido $C_r(sI - A_r)^{-1} B_r$ onde:

$$A_r = \hat{A}_1 + \hat{B}_1(\hat{C}_1 - F_c X_2)$$

$$B_r = \hat{B}_1$$

$$C_r = -C_c X_2$$

Na versão pela esquerda, parte-se de

$$\Gamma = \left[\begin{array}{c|cc} A_c - L_c C_c & L_c & B_c \\ \hline C_c & 0 & 0 \end{array} \right].$$

e

$$W(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_p & B_p C_c & B_p \\ B_c C_p & A_c & L_c \\ \hline 0 & C_c & I \\ C_p & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_w & B_w \\ \hline C_w & D_w \end{array} \right].$$

Após encontrar Γ_1 como uma aproximação Hankel-ótima de $[\Gamma W_a]_-$ com

$$W_a(s) = W(-s) = \left[\begin{array}{c|c} -A_w & B_w \\ \hline -C_w & D_w \end{array} \right].$$

faz-se

$$\Gamma_r = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_1 & Z \\ \hline \hat{C}_1 & 0 \end{array} \right]$$

onde

$$Z = [\hat{B}_1 - V_2 L_c \quad -V_2 B_c]$$

e V_2 é a solução de

$$V_2(A_c - L_c C_c) + \hat{A}_1 V_2 + \hat{B}_1 C_c = 0.$$

O controlador reduzido $C_r(sI - A_r)^{-1}B_r$ é definido por

$$\begin{aligned} A_r &= \hat{A}_1 + (\hat{B}_1 - V_2 L_c) \hat{C}_1 \\ B_r &= -V_2 B_c \\ C_r &= \hat{C}_1 \end{aligned}$$

A validade deste método no que se refere à norma \mathcal{L}_∞ ainda deve ser melhor estudada levando em conta a influência da utilização da ponderação anti-estável.

5.3 Balanceamento: variações sobre um mesmo tema

Antes do desenvolvimento do método das fatorações coprimas, outros métodos apresentavam soluções que envolviam equações semelhantes. Esta seção apresen-

ta alguns destes métodos para mostrar como as frações coprinas explicam, até certo ponto, seu sucesso. Aproveitando o tema da redução de controladores, esta seção apresenta métodos que possuem uma característica em comum: aplicam balanceamento a duas matrizes semi-definidas positivas e utilizam a transformação resultante para balancear o controlador de uma configuração em malha fechada. O propósito da apresentação destes métodos é, basicamente, a comparação com o método das fatorações coprinas.

Como observado anteriormente, os métodos do capítulo 2 podem ser usados para reduzir o controlador independentemente da planta. Baseados nesta idéia, Yousuff e Skelton (ref. [44]) desenvolveram um método adequado aos controladores LQG que consiste no balanceamento das soluções das seguintes equações

$$A_c P + P A_c^T + B_c V B_c^T = 0$$

e

$$A_c^T Q + Q A_c + C_c^T R C_c = 0$$

onde as matrizes R e V são as mesmas usadas como ponderações para cálculo do controlador.

Uma vez que este método não pode ser aplicado a controladores instáveis sem uma manipulação especial, os mesmos autores propõem que, neste caso, as equações

$$(A_p - B_p F_p)P + P(A_p - B_p F_p)^T + B_c V B_c^T = 0$$

e

$$(A_p - L_p C_p)^T Q + Q(A_p - L_p C_p) + C_c^T R C_c = 0$$

sejam usadas ao invés daquelas. Estas equações possuem soluções únicas pois $(A_p - L_p C_p)$ e $(A_p - B_p F_p)$ são matrizes Hurwitz.

O mesmo Skelton, em parceria com Davis (ref. [11]), propôs ainda uma terceira modificação na qual as matrizes a balancear seriam soluções de

$$(A_p - B_p F_p)P + P(A_p - B_p F_p)^T + C_c^T R C_c = 0$$

e

$$(A_p - L_p C_p)^T Q + Q(A_p - L_p C_p) + B_c V B_c^T = 0.$$

A lógica e a matemática por trás destes métodos nem sempre são muito claras ao contrário do que acontece com os dois métodos que encerram esta seção. Neles, a diagonalização é aplicada às soluções das equação de Riccati que produzem o controlador (LQG ou \mathcal{H}_∞) de modo que os estados retidos sejam aqueles mais “difíceis” de filtrar e de controlar.

O método dedicado ao caso LQG é devido a Jonckheere e Silverman. Originalmente, como apresentado em [22], ele procura uma matriz inversível que diagonalize as soluções das equações de Riccati para um LQG normalizado. Sendo o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_p x + B_p u + B_N w \\ y &= C_p x + v \\ z &= C_P x\end{aligned}$$

as equações do LQG normalizado são

$$\begin{aligned}A_p P + P A_p^T + B_p B_p^T - P C_p^T C_p P &= 0 \\ A_p^T Q + Q A_p + C_p^T C_p - Q B_p B_p^T Q &= 0.\end{aligned}$$

Uma extensão óbvia é utilizar o método para qualquer controlador LQG, não somente para o caso normalizado, balanceando P e Q para

$$\begin{aligned}A_p P + P A_p^T + B_N W B_N^T - P C_p^T V^{-1} C_p P &= 0 \\ A_p^T Q + Q A_p + C_P^T Q C_P - Q B_p R^{-1} B_p^T Q &= 0\end{aligned}$$

onde B_N é a matriz referente ao ruído de entrada e C_P é referente à performance do sistema. W , V , Q e R têm os significados costumeiros para controladores LQG.

Para o caso \mathcal{H}_∞ existe um método dedicado a controladores normalizados mas que também pode ser estendido ao caso geral. Como apresentado em [30] por

Mustafa e Glover, ele aplica o balanceamento às soluções das equações de Riccati referentes a um controlador \mathcal{H}_∞ calculado para

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & [B_p & 0] & [B_p] \\ \hline C_p & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \\ \hline C_p & \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{array} \right]$$

que são

$$A_p P + P A_p^T + B_p B_p^T - (1 - \gamma^{-2}) P C_p^T C_p P = 0$$

$$A_p^T Q + Q A_p + C_p^T C_p - (1 - \gamma^{-2}) Q B_p B_p^T Q = 0.$$

Para o caso geral, onde

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ \hline C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right],$$

aplica-se o balanceamento às soluções das equações equivalentes.

Capítulo 6

Estudo de caso

Fazer uma comparação teórica entre os diversos métodos apresentados no decorrer deste trabalho é uma tarefa bastante difícil, senão impossível. Pode-se argüir com base na simplicidade computacional de algum deles ou em algum limitante no caso não ponderado mas não existem ainda evidências conclusivas para que um método supere os outros. O fato de que alguns métodos possuem limitações na estrutura do controlador ou da planta também é um agravante, junto com a existência de parâmetros livres em outros métodos.

Este capítulo propõe-se a fazer um estudo de caso para mostrar o comportamento dos métodos em uma aplicação prática. Isso será feito na seção 6.1. Uma descrição resumida de métodos de redução e os resultados de sua aplicação a um outro sistema podem ser encontrados em [12].

6.1 O problema: Boeing 767

O problema de estabilizar uma planta de ordem 55 com um controlador reduzido será considerado nesta seção. O sistema referente à dinâmica vertical de um Boeing foi apresentado em [10] e estudado em [28] e apresenta-se instável, fase não-mínima.

Os autovalores da matriz de dinâmica são dados na tabela 6.1 e chama-s atenção para o par instável $0.1015 \pm 19.77i$. Além disso, existem duas entradas de controle e duas saídas que podem ser medidas. Outras três entradas injetam perturbações na planta enquanto dez saídas fornecem medidas de performance do sistema.

Tabela 6.1: Pólos do modelo

$0.1015 \pm 19.77i$	$-3.418 \pm 88.67i$	$-11.79 \pm 304.6i$
$-0.023202 \pm 0.092543i$	$-4.441 \pm 69.45i$	-20
$-0.3165 \pm 14.33i$	$-5.108 \pm 53.39i$	-20
$-0.3892 \pm 22.29i$	$-5.199 \pm 50.64i$	-20
$-0.5165 \pm 0.0052678i$	-5.301	-20
$-0.9883 \pm 36.16i$	$-5.67 \pm 92.96i$	-33.27
$-1.342 \pm 2.547i$	$-6.197 \pm 40i$	-40
$-2.312 \pm 21.51i$	$-8.177 \pm 16.61i$	-40
$-2.792 \pm 26.71i$	$-8.221 \pm 139.1i$	-221.2
$-2.796 \pm 63.79i$	$-10.35 \pm 163i$	-1000
$-3.332 \pm 56.37i$	$-11.72 \pm 109.3i$	-1000

Como apresentado em [10] o objetivo é sintetizar uma lei de controle de ordem menor que 10 que satisfaça os seguintes requisitos:

- Amortecimento mínimo de 0.015 para os modos com frequência próxima a 20 rad/s.
- Amortecimento mínimo de 0.4 para os modos de baixa frequência.
- Atenuação da resposta da aeronave à turbulência.
- Margens de ganho e fase adequadas.

Para exemplificar o comportamento de alguns métodos de redução de modelo, a planta foi reduzida e os resultados comparados com os limitantes disponíveis.

Para estabelecer uma comparação entre os métodos, reduziu-se um controlador LQG para todas as ordens entre 1 e 54. O projeto do sistema de controle foi auxiliado pelo computador usando o programa Ψlab (*scilab*), desenvolvido pelo Inria (*Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique*) na França e disponível para um grande número de sistemas operacionais compatíveis com UNIX.

Cabe ressaltar que diversas dificuldades do ponto de vista numérico apresentaram-se ao lidar-se com um sistema de ordem tão elevada. Por exemplo, o cálculo de margens de ganho e de fase envolvem a obtenção da resposta em frequência de um sistema de ordem 110. Esta ordem é tão elevada que ultrapassa a limitação imposta pelos projetistas do Ψlab para extração confiável de raízes de polinômios. Para atenuar um pouco o problema, antes de começar o projeto do controlador, transformações adequadas foram aplicadas ao sistema visando diminuir o número de condição das diversas matrizes do modelo. Embora todo cuidado tenha sido adotado ao alimentar o Ψlab (e outros programas) com os dados de [10] (indisponíveis em mídia eletrônica, ótica ou magnética), foi impossível calcular um controlador igual ao apresentado nas referências. Não obstante, o controlador encontrado é bastante semelhante aos lá exibidos e, de qualquer maneira, é suficiente para a comparação desejada.

Embora alguns métodos de malha aberta pudessem ter sido aplicados ao controlador, desconsiderando a planta, isso não foi feito. Optou-se por aplicá-los diretamente à planta, cujo modelo reduzido seria o ponto de partida para o cálculo do controlador. Mais tarde, o controlador reduzido viria a controlar a planta de ordem completa. Com isso, mostra-se que este tipo de redução, apesar de bastante criticado, tem sua utilidade. Uma comparação destas duas abordagens e de outros métodos encontra-se em [21]. A figura 6.1 mostra a estrutura do sistema que será tratado e o apêndice B contém os dados do modelo já considerando as transformações e do controlador obtido. As matrizes Q , R , W , e V do LQG também se

encontram lá.

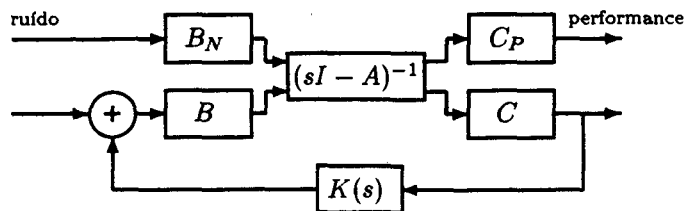


Figura 6.1: Configuração em malha fechada

6.2 Redução de modelo

O modelo da planta em malha aberta será reduzido nesta seção. Os valores singulares Hankel da parte estável deste modelo estão apresentados na tabela 6.2. Eles são 53 ao todo pois a planta tem dois pólos instáveis. Os métodos dos capítulos 2 e 3 foram usados para reduzir o modelo até as ordens 6, 27 e 36 (escolhidas aleatoriamente). Para o método do truncamento da realização balanceada e para o uso de perturbações singulares reduziu-se somente a parte estável, copiando a parte instável para a aproximação (como na seção 2.5). No caso das aproximações Hankel-ótimas utilizou-se o procedimento da seção 3.6.

Quando possível permitiu-se também a existência de transferência direta no modelo reduzido. Os resultados obtidos com a redução estão na tabela 6.3, onde também se vê o valor de $\sum_{i=k-1}^{53} \sigma_i$ para as diversas ordens. É necessário lembrar que o modelo tem dois pólos instáveis para explicar porque se somam os valores singulares Hankel de $k-1$ até 53 ao invés de começar em $k+1$ e ir até 55. Este valor dá uma noção dos limitantes superiores para os vários métodos mas não é muito significativo. Como notado em [17] e [6] o erro pode ser, na verdade, muito menor que o limitante, especialmente quando os valores singulares Hankel estão muito espaçados.

Tabela 6.2: Valores singulares da parte estável do modelo

$9.335E + 26$	$9.729E + 21$	$2.796E + 18$
$7.407E + 26$	$8.587E + 21$	$2.556E + 18$
$2.958E + 26$	$4.156E + 21$	$1.215E + 18$
$1.416E + 26$	$3.536E + 21$	$1.118E + 18$
$5.413E + 24$	$3.279E + 21$	$9.249E + 17$
$4.267E + 24$	$3.170E + 21$	$3.360E + 17$
$1.071E + 24$	$1.255E + 21$	$6.702E + 16$
$4.692E + 23$	$4.916E + 20$	$6.336E + 16$
$1.886E + 23$	$3.009E + 20$	$2.643E + 16$
$1.708E + 23$	$2.563E + 20$	$6.823E + 15$
$1.410E + 23$	$1.585E + 20$	$1.957E + 15$
$9.952E + 22$	$1.502E + 20$	$2.055E + 14$
$5.845E + 22$	$7.302E + 19$	$1.821E + 14$
$4.478E + 22$	$3.728E + 19$	$1.586E + 14$
$1.880E + 22$	$2.064E + 19$	$3.880E + 12$
$1.552E + 22$	$1.859E + 19$	$3.258E + 11$
$1.490E + 22$	$8.408E + 18$	$3.258E + 11$
$1.273E + 22$	$3.596E + 18$	

Tabela 6.3: Normas \mathcal{L}_∞ do erro absoluto para modelos reduzidos de ordem k

Método	$k = 6$	$k = 27$	$k = 36$
Truncamento	$4.06 \cdot 10^{12}$	$4.18 \cdot 10^{10}$	$5.86 \cdot 10^9$
Pert. Sing.	$4.35 \cdot 10^{12}$	$6.90 \cdot 10^{10}$	$8.63 \cdot 10^9$
Pert. Sing. c/ D	$3.89 \cdot 10^{12}$	$4.59 \cdot 10^{10}$	$6.43 \cdot 10^9$
Hankel-ótima	$3.97 \cdot 10^{12}$	$3.83 \cdot 10^{10}$	$5.59 \cdot 10^9$
Hankel-ótima c/ D	$5.19 \cdot 10^{12}$	$2.96 \cdot 10^{10}$	$3.27 \cdot 10^9$
$\sum_{i=k-1}^{53} \sigma_i$	$1.20 \cdot 10^{25}$	$1.53 \cdot 10^{21}$	$2.11 \cdot 10^{19}$

Nas figuras 6.2, 6.3 e 6.4 vê-se os valores do erro absoluto em frequência para o método do truncamento da forma balanceada, para o uso de perturbações singulares e para a aproximação Hankel-ótima, respectivamente. Nestes gráficos, o modelo reduzido é de ordem 27 e não possui transferência direta.

6.3 Redução de controlador

Baseado na figura 6.1 verificou-se a estabilidade do sistema para cada controlador obtido, além da norma \mathcal{L}_∞ da primeira entrada de ruído para cada saída de performance. Também verificou-se o amortecimento do modo que situa-se em torno de 20 rad/s. Com relação à obtenção deste valor, uma ressalva deve ser feita: dependendo da ordem do controlador reduzido, dois modos alternavam-se nessa região. Um destes modos tem amortecimento em torno de 0.07 durante todo o processo, e o outro, em torno de 0.04. Optou-se por acompanhar o comportamento daquele par de pólos com amortecimento de cerca de 0.04 mesmo que ele não fosse sempre o mais próximo de 20 rad/s.

Os métodos aplicados foram os seguintes:

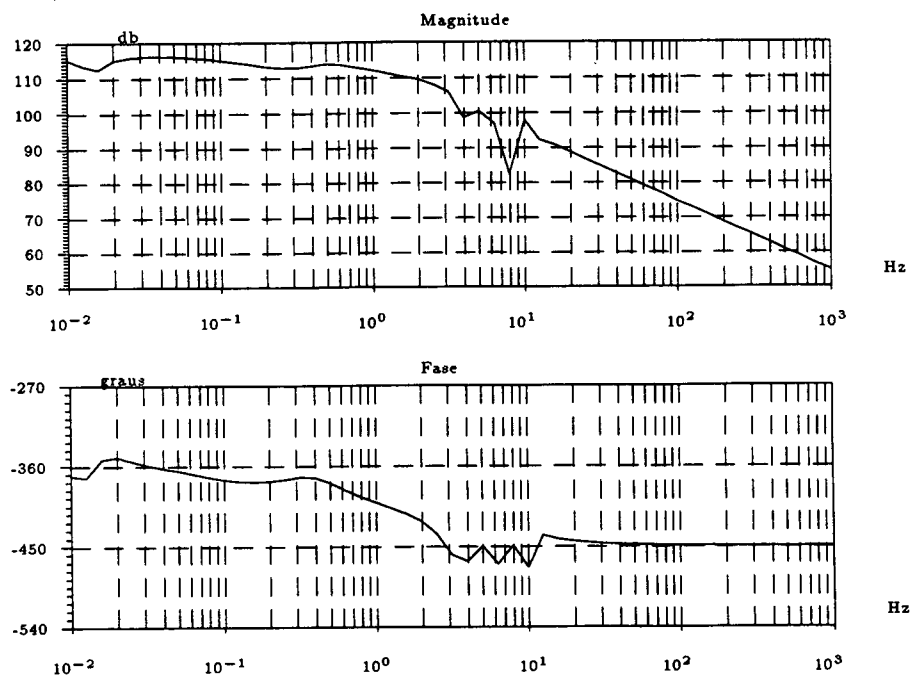


Figura 6.2: Erro absoluto – modelo reduzido para ordem 27 com o método do truncamento da forma balanceada

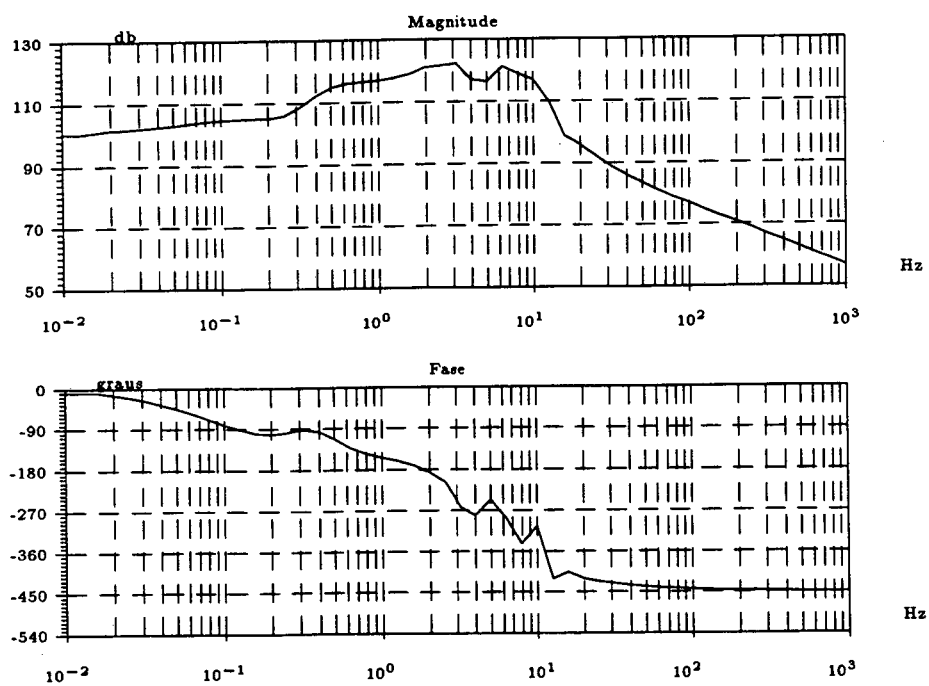


Figura 6.3: Erro absoluto – modelo reduzido para ordem 27 com o método das perturbações singulares

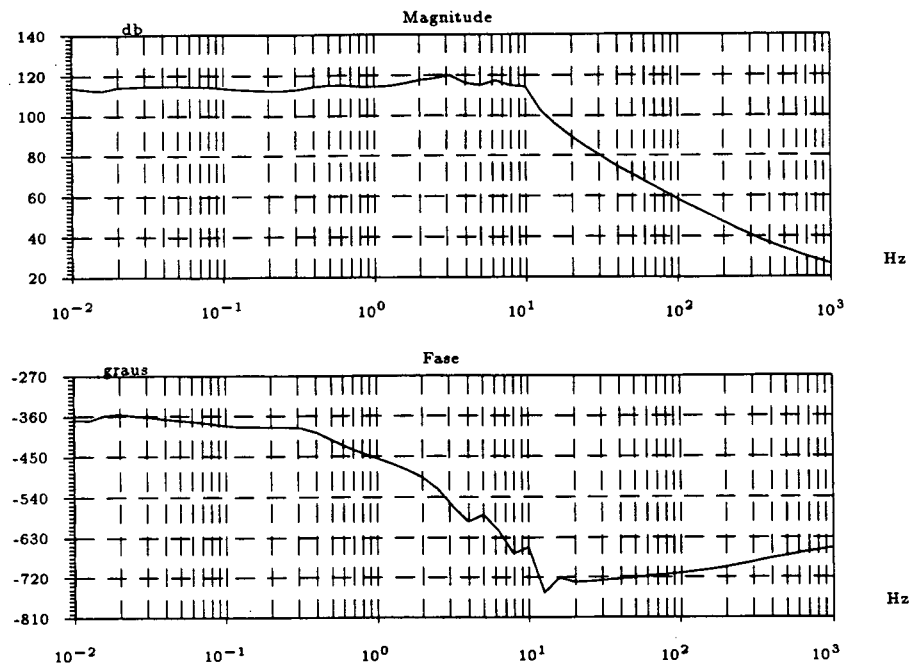


Figura 6.4: Erro absoluto – modelo reduzido para ordem 27 com o método da aproximação Hankel-ótima

Moore: o método do capítulo 2 por truncamento da realização balanceada aplicado à planta, o controlador é calculado a seguir.

Fernando: o método do capítulo 2 por perturbações singulares aplicado à planta.

Glover: aproximação da planta via norma Hankel como no capítulo 3. A planta resultante é estritamente própria.

Anderson: utilização de frações coprims pela esquerda como em [28] (ver também a seção 5.2.2).

AndersonDir: idem ao anterior mas pela direita.

Coprims: o método do capítulo 5 pela esquerda. A matriz F_c é calculada usando um LQG normalizado.

CoprimsDir: idem ao anterior mas pela direita. Ibidem para L_c .

Hankel: outro método do capítulo 5, agora da seção 5.2.3. Fatoração do controlador pela esquerda.

HankelDir: idem ao anterior porém com fatoração pela direita.

Enns: aproximação usando o método descrito na seção 4.4, ponderando pela entrada.

EnnsSaída: mesmo método do item anterior mas com ponderação na saída.

Algumas vezes será necessário referenciar todos os métodos que usam fatoração pela direita. O método **EnnsSaída** será incluído nesta lista já que pode ser visto como um caso particular do método das fatorações coprims do capítulo 5. Da mesma forma, o método **Enns** pertence aos métodos pela esquerda.

Tabela 6.4: Performance do controlador de ordem 55

Estação de asa interna	
Cisalhamento	8.5363e5
Momento fletor	2.347e11
Torção	4.439e8
Estação de asa externa	
Cisalhamento	2.5913e5
Momento fletor	2.590e9
Torção	1.198e9
Atividades dos controles	
Taxa de variação do profundor	4.0661e-02
Deflexão do profundor	5.4163e-03
Taxa de variação do aileron	2.7526e-01
Deflexão do aileron	1.5818e-02

6.3.1 Resultados

O objetivo desta seção é mostrar algumas das características que ficaram evidentes durante as simulações. Como referência, a tabela 6.4 mostra as figuras de performance (norma \mathcal{L}_∞ da primeira entrada de ruído para as saídas de performance) obtidas com o controlador de ordem completa. Grande parte dos resultados será apresentado na forma normalizada, em relação ao valor obtido com o controlador de ordem 55.

Primeiro, os resultados referentes à estabilidade da malha fechada serão apresentados. As ordens dos controladores nas quais os métodos falham em estabilizar a planta estão indicadas na tabela 6.5.

Os métodos **Moore**, **Fernando** e **Glover** não fornecem controladores para

Tabela 6.5: Pontos de instabilidade

Método	Ordens dos controladores
Moore	–
Fernando	3,5,7,8,11,13,15,16,17,19
Glover	2,3,5,9,15,16,17,18,20,21
Anderson	1,2,6,8,11
AndersonDir	1,2,11,13,15,18,24,30
Coprma	–
CoprmaDir	1,2,3,4
Hankel	2,3
HankelDir	1,2,3,4,5
Enns	–
EnnsSaida	1,2,3,4

ordem 1 pois não é possível reduzir a planta além do número de pólos instáveis. Destes três métodos, o primeiro destaca-se pois estabiliza a planta com controladores de todas as ordens. Os outros dois falham em 10 oportunidades cada, com controladores de ordem menor que 22.

Ainda quanto a estabilidade, os métodos pela esquerda superam os seus equivalentes pela direita. No total, eles falham apenas 7 vezes contra 20 dos métodos pela direita. Nota-se que os métodos **Coprime** e **Enns** não falham sequer uma vez. Isso, no entanto, não significa que este resultado sempre se verificará. Mais provavelmente, ele se deve a características estruturais do sistema em questão.

Uma comparação interessante de ser feita é entre o comportamento dos métodos pela esquerda e pela direita. Para tanto, os métodos **Coprime** e **CoprimeDir** foram analisados e nota-se que a partir da ordem 10 os dois fornecem excelentes resultados. À medida que a ordem se aproxima de zero os resultados tendem a piorar consideravelmente. Como o intuito é comparar os dois métodos as figuras 6.6 e 6.7 apresentam superpostos os resultados relativos à oitava e à décima saída. Na figura 6.5 encontra-se o comportamento do fator de amortecimento. Nota-se a partir das figuras que um método não é geralmente melhor no que diz respeito à performance apesar de haver, para uma dada saída, um comportamento uniforme com um método superando o outro.

Em seguida uma comparação entre os diversos métodos será feita. Por brevidade, somente serão comparadas as versões pela esquerda dos diversos métodos, além do método **Moore**. As figuras 6.8 e 6.9 mostram os resultados disponíveis para medidas da primeira saída do sistema. Afora a excelente performance dos métodos **Coprime** e **Enns** vale notar que o método **Moore**, apesar de ser aplicado em um estágio anterior ao cálculo do controlador, produz bons resultados. Quanto ao método **Anderson**, ele também dá bons resultados mas é prejudicado por possuir diversas ordens nas quais acontecem instabilidades. Isso não é uma característica esperada para um método conhecido por sua ótima performance e,

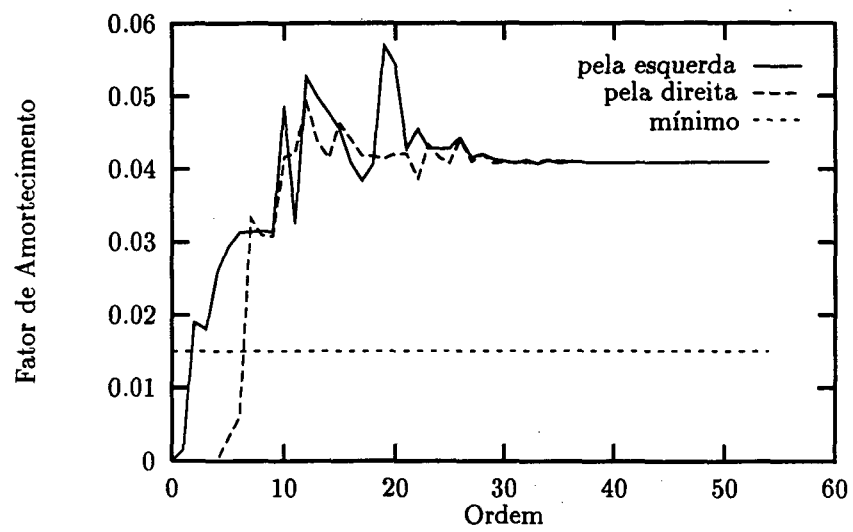


Figura 6.5: Fatores de Amortecimento

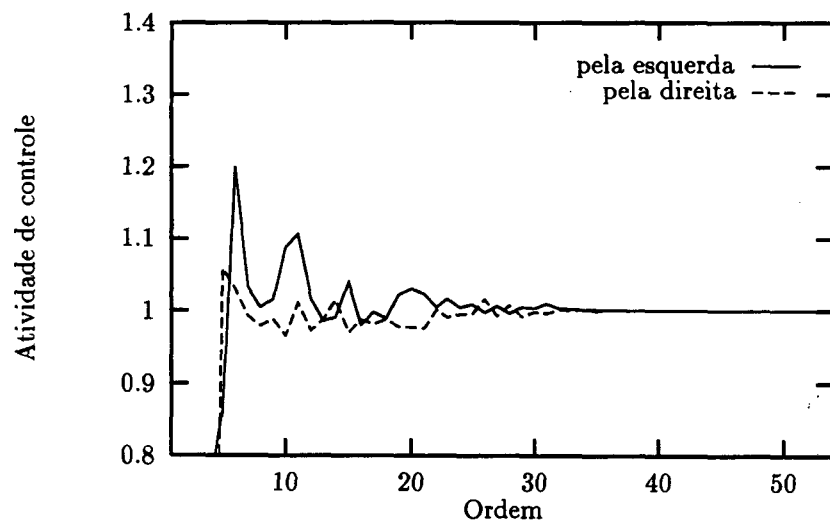


Figura 6.6: Norma da saída 8 normalizada

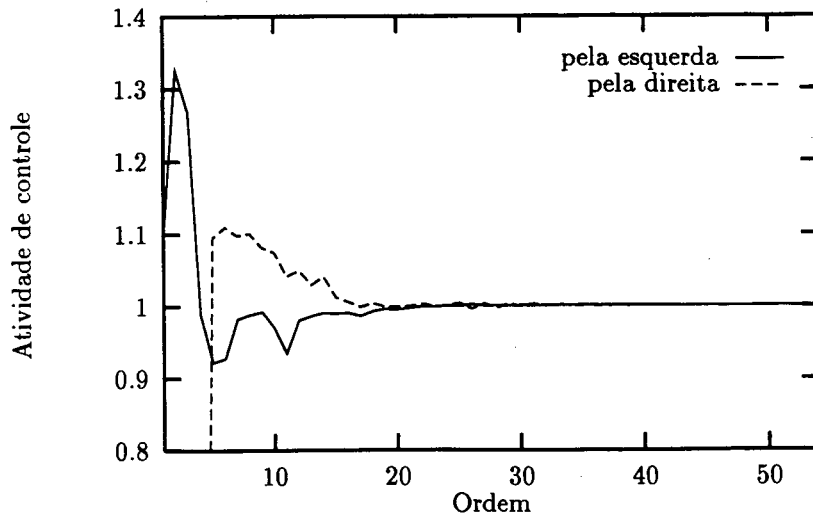


Figura 6.7: Norma da saída 10 normalizada

muito provavelmente, decorre de problemas numéricos. O último método, **Hankel**, demonstra estar distante do valor “nominal” mas mantém-se constante. Uma vez que esta é uma abordagem bastante nova, é possível que haja vários pontos em que este método pode melhorar.

Finalmente, nas figuras 6.10 e 6.11 estão representados os resultados para os mesmos métodos mas avaliando a segunda saída de performance. Os resultados não são muito diferentes dos anteriores, demonstrando uma certa constância neste sentido.

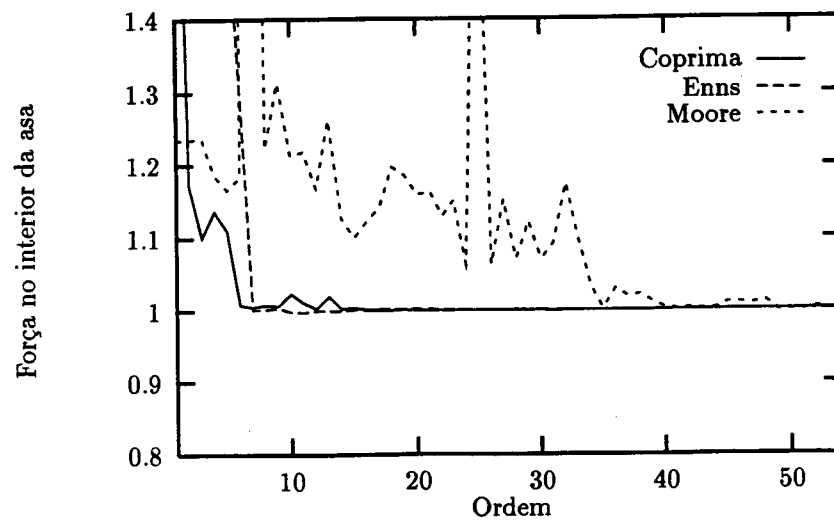


Figura 6.8: Norma da saída 1 normalizada – parte 1

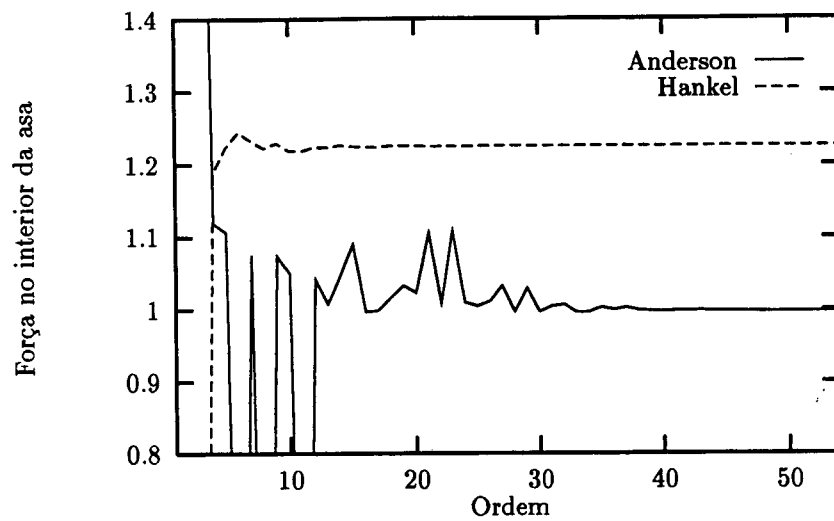


Figura 6.9: Norma da saída 1 normalizada – parte 2

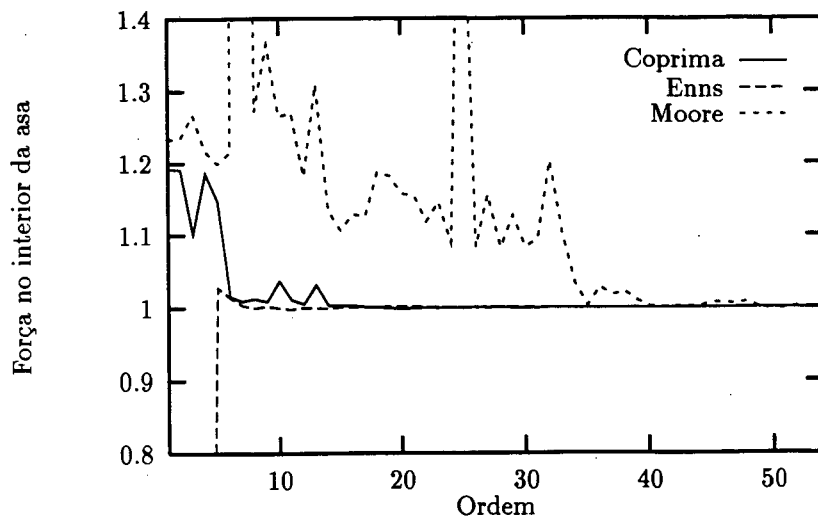


Figura 6.10: Norma da saída 2 normalizada – parte 1

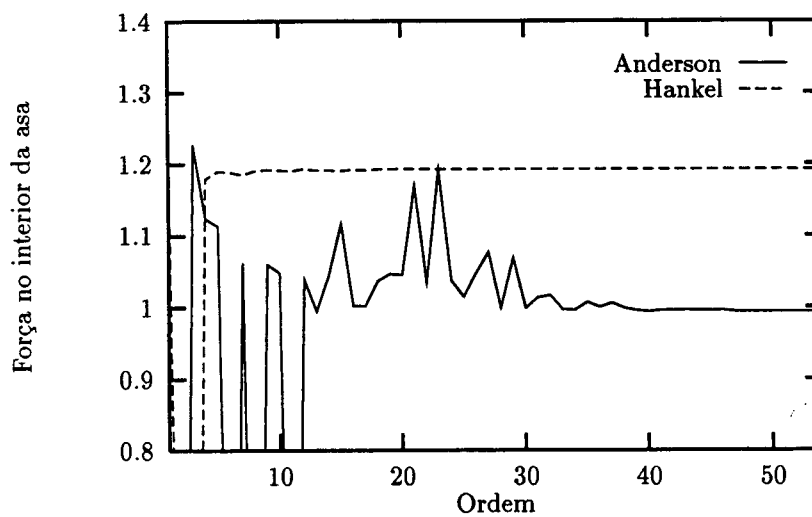


Figura 6.11: Norma da saída 2 normalizada – parte 2

Capítulo 7

Conclusão

O objetivo desta dissertação foi o estudo de diversos métodos de redução de modelos e controladores e em particular aqueles baseados na forma balanceada. Entre as diversas abordagens analisadas considerou-se também a aplicação de métodos de redução de modelos à aproximação de controladores.

Seguindo uma pequena introdução, a tese desenvolveu-se a partir do capítulo 2 onde a forma balanceada foi estudada, dando origem a dois métodos para redução de modelos. Algumas extensões possíveis também foram citadas naquele capítulo. Ainda na linha de redução de modelo apresentou-se, no capítulo 3, a técnica conhecida como aproximação Hankel-ótima, segundo a qual a norma Hankel é minimizada na expectativa de que o valor da norma \mathcal{L}_∞ seja pequeno.

O capítulo 4 introduziu a utilização de ponderações em frequência no processo de redução de modelos. Muitos métodos baseiam-se na teoria apresentada naquele capítulo, inclusive aqueles do capítulo 5. Com uma abordagem uniforme, o capítulo 5 forneceu um método baseado na fatoração coprima da função de transferência do controlador. Além disso, mostrou-se que três conhecidos métodos podem ser derivados a partir dali, como casos particulares. Combinando este método com a técnica de aproximações Hankel-ótimas, derivou-se ainda um outro

método.

Os resultados da aplicação de diversos métodos ao problema de atenuação de perturbações na dinâmica vertical de um Boeing foram apresentados no capítulo 6. Embora não seja possível estabelecer qual dos métodos é o mais indicado para cada aplicação, o capítulo 6 mostrou como funcionam os métodos e quais resultados cada um deles pode apresentar.

Outros métodos que merecem menção mas não são baseados na forma balanceada são apresentados no apêndice A. Como alguns desses métodos são especialmente eficazes, julgou-se necessário apresentá-los em um apêndice e deixá-los como indicação de uma possível extensão do trabalho exposto na parte principal da dissertação. Um estudo aprofundado destes métodos seria útil até mesmo com o intuito de comparar abordagens bastante diferentes.

Como perspectivas para futuros trabalhos, o método do capítulo 5 é, sem dúvida, uma grande fonte de inspiração. Apesar de mostrar-se eficiente ao ser empregado no exemplo do capítulo 6, esta abordagem ainda não se esgotou. Ainda resta, por exemplo, estudar de que forma a escolha das matrizes F_c e L_c influencia o resultado final, o que já foi verificado quando os vários métodos derivados desta abordagem foram aplicados a um mesmo problema. A obtenção de limitantes superiores na norma \mathcal{L}_∞ é outro ponto onde pode-se concentrar atenções. É interessante, também, procurar particularizar o método para controladores baseados em observadores de ordem reduzida.

O método que incorpora elementos das técnicas de fatorações coprimas e de aproximações Hankel-ótimas (seção 5.2.3) é bastante eficaz para manter a estabilidade do sistema com um controlador reduzido. Todavia, é possível que este método comporte modificações que auxiliem a manutenção da performance e uma das possibilidades seria utilizar desigualdades matriciais lineares ao invés de aproximações da norma Hankel.

Também outros métodos derivados da forma balanceadas podem vir a ser

objetos de futuros estudos. Alguns métodos como o BST (ref. [45]) e o IWBT (ref. [20]), apenas citados no decorrer deste trabalho, já se constituem importantes métodos. Finalmente, pode-se estudar como os métodos apresentados podem ser estendidos para o caso discreto.

Como objetivo geral, esta dissertação buscou sintetizar os principais métodos de redução de ordem de plantas e controladores, principalmente no que diz respeito ao emprego de realizações balanceadas e sua relação com métodos envolvendo ponderações em frequência e fatorações coprimas. Além de atingir tal objetivo, novas abordagens foram apresentadas de modo que outros métodos poderão ser desenvolvidos num futuro próximo.

Apêndice A

Outros métodos de redução

Ao longo desta dissertação foram tratados vários métodos e grande parte deles tinha forte ligação com o precursor método de Moore. No entanto, a técnica de balanceamento é somente uma ferramenta, dentre outras, para efetuar a redução de sistemas. E, além do mais, alguns métodos não são exatamente métodos de redução, mas tem a mesma finalidade. Neste apêndice, encontram-se métodos que destoam um pouco da abordagem sobre a qual se direcionou principal atenção até o momento.

A.1 Métodos relacionados com LQG

Um método que não é propriamente de redução foi apresentado por Collins, Jr. e colegas (ref. [8]). Basicamente, a atenção concentra-se em projetos do tipo LQG. Como na metodologia LQG o projetista deve estabelecer matrizes que produzam um controlador que satisfaça determinadas especificações, Collins, Jr. *et al* apontam diretrizes para que esta escolha leve a controladores “fáceis” de reduzir. Por controladores “fáceis” de reduzir entenda-se controladores que estão muito próximos de serem não-observáveis ou não-controláveis.

Em uma série de artigos que inclui [38], [37] e [43], Skelton e Yousuff apresentam um método para a obtenção de um controlador de ordem reduzida que está baseado na avaliação da importância de cada componente do controlador em determinada função de custo do sistema global. Esta teoria está baseada em uma técnica chamada CCA (*Component Cost Analysis*) e resulta no estudo de controladores EEC (*Energy Equivalent Controllers*). O método é dedicado a controladores LQG.

Para este método, a planta é dada por (A_p, B_p, C_p) e o controlador por (A_c, B_c, C_c) . Além disso, as matrizes Q , R , W e V são usadas para ponderar as saídas, as entradas, as perturbações e os ruídos de medição, respectivamente. F_p é o ganho da parte LQR tal que $A_p - B_p F_p$ seja Hurwitz.

Um resumo deste método começa pela obtenção de uma matriz \hat{X} tal que

$$(A_p - B_p F_p) \hat{X} + \hat{X} (A_p - B_p F_p)^T + B_c V B_c^T = 0$$

e subsequente extração de sua “raiz quadrada” através, por exemplo, da decomposição em valores singulares:

$$\hat{X} = \Omega \Omega^T.$$

Em seguida, aplica-se decomposição em valores singulares novamente

$$\Omega^T C_c^T R C_c \Omega = U \Sigma U^T$$

com

$$\Sigma = \text{diag}\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\}.$$

e

$$\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_n \geq 0.$$

Finalmente, monta-se a matriz de transformação

$$T = \Omega U$$

que é aplicada ao controlador para posterior truncamento do mesmo.

A.2 Um critério na norma \mathcal{L}_∞

Como representante de outra linha de pesquisa na busca de modelos reduzidos, o seguinte método merece menção. Seu objetivo é a manutenção, no modelo reduzido, de uma característica do tipo “norma \mathcal{L}_∞ menor que γ ”. Primeiramente, busca-se um modelo reduzido G_r para o sistema G com

$$y(s) = G(s)u(s).$$

Define-se ainda γ , um valor pré-estabelecido e

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{(y(t) - y_r(t))^T(y(t) - y_r(t))\}$$

onde $\mathcal{E}\{\cdot\}$ é o operador esperança matemática.

Três variantes são apresentadas por Dombrovskii em [14]:

1. Encontrar um modelo reduzido tal que J é mínimo e $\|G_r(s)\|_\infty \leq \gamma$
2. Encontrar um modelo reduzido tal que J é mínimo, $\|G_r(s)\|_\infty \leq \gamma$ e o processo de redução preserve a posição de um conjunto pré-determinado de pólos.
3. Encontrar um modelo reduzido tal que J é mínimo e $\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq \gamma$

A.3 Coordenadas de correlação

Para finalizar este capítulo o método conhecido como C^4 e elaborado em [13] por de Villemagne e Skelton será apresentado. A abreviação C^4 significa *Coordenadas Canônicas de Correlação do Controlador*. Este é um método que produz bons resultados pois, além de visar a manutenção da estabilidade, permite ao projetista utilizar um parâmetro extra para obter boa performance. Apesar de voltado para o caso LQG, o método também é aplicável para o caso geral.

De forma algorítmica, o método pode ser assim apresentado. Seja o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_N w$$

$$z = C_P x$$

$$y = Cx + v$$

onde u e w são entradas de controle e perturbação, v é o ruído de medição, y e z são as saídas medidas e de performance. As matrizes Q , R , W e V são aquelas padrões do LQG para y , u , w e v . O sistema é então controlado por

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c y$$

$$u = C_c x_c$$

O sistema como um todo, em malha fechada, tem a seguinte representação

$$G_{CL} = \left[\begin{array}{cc|cc} A & BC_c & B_N & 0 \\ B_c C & A_c & 0 & B_c \\ \hline C_P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_c & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{CL} & B_{CL} \\ \hline C_{CL} & 0 \end{array} \right].$$

Definindo

$$W_{CL} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}$$

resolve-se

$$X_{CL} A_{CL}^T + A_{CL} X_{CL} + B_{CL} W_{CL} B_{CL}^T = 0$$

para

$$X_{CL} = \begin{bmatrix} X & X_{12} \\ X_{12}^T & X_c \end{bmatrix}.$$

Em seguida, faz-se as decomposições de Cholesky

$$X = \tau \tau^T$$

$$X_c = \tau_c \tau_c^T$$

e a decomposição em valores singulares

$$\tau^{-1}X_{12}\tau_c^{-T} = U_1\Delta U_2^T$$

Assim, constrói-se uma matriz de mudança de base

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}$$

$$T_1 = \tau U_1$$

$$T_2 = \tau_c U_2$$

que ao ser aplicada ao sistema em malha fechada produz

$$G_{CL} = \left[\begin{array}{cc|cc} \bar{A} & \bar{B}\bar{C}_c & \bar{B}_n & 0 \\ \bar{B}_c\bar{C} & \bar{A}_c & 0 & \bar{B}_c \\ \hline \bar{C}_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{C}_c & 0 & 0 \end{array} \right]$$

No novo sistema de coordenadas, X_{CL} tem a forma

$$X_{CL} = \begin{bmatrix} I & \Delta \\ \Delta & I \end{bmatrix}$$

e Δ representa a correlação entre cada coordenada do controlador com a respectiva coordenada da planta.

O próximo e importante passo é escolher um número p ($p \leq k$, k sendo o grau do controlador reduzido) de variáveis “primárias”. Essas variáveis estão intimamente ligadas à estabilidade do sistema reduzido, quanto maior for p mais importância o método dará à estabilidade. As $k - p$ variáveis restantes dizem respeito à performance. Com este valor de p escolhe-se, de forma um pouco arbitrária, q como o menor inteiro maior que $\frac{k-p}{n_u}$ (n_u é o número de entradas). A

partir deste valores definem-se

$$\begin{aligned}
 S &= [0_p \quad I_{n_c-p}] \\
 \bar{C}_{c2} &= \bar{C}_c S^T = C_c T_2 S^T \\
 \bar{B}_{c2} &= S \bar{B}_c = S T_2^{-1} B_c \\
 \begin{bmatrix} \bar{A}_{c11} & \bar{A}_{c12} \\ \bar{A}_{c21} & \bar{A}_{c22} \end{bmatrix} &= T_2^{-1} A_c T_2 \quad \bar{A}_{c22} \in \mathbb{R}^{n_c-p \times n_c-p} \\
 \bar{C} &= C T_1 \\
 \bar{B} &= T_1^{-1} B
 \end{aligned}$$

e montam-se

$$J_{\text{dec}} = [\bar{B}_{c2} \bar{C} \quad \bar{A}_{c21} \quad \bar{A}_{c12}^T \quad \bar{C}_{c2}^T \bar{B}^T]$$

e

$$J_{\text{damp}} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{c2} \\ \bar{C}_{c2} \bar{A}_{c22} \\ \vdots \\ \bar{C}_{c2} \bar{A}_{c22}^{q-1} \end{bmatrix}^T$$

Finalmente, faz-se a decomposição em valores singulares de

$$J = [J_{\text{dec}} \quad J_{\text{damp}}] = U \Sigma V^T$$

e extrai-se U_1 , as primeiras $k - p$ colunas de U .

Estes últimos passos visam garantir uma boa aproximação para as respostas ao salto em regime permanente e ao impulso, entre outras propriedades. Mais especificamente, estes passos estão ligados com a manutenção de parâmetros de Markov do sistema.

O controlador reduzido é obtido definindo

$$L = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & U_1^T \end{bmatrix}$$

e escrevendo

$$A_r = L T_2^{-1} A_c T_2 L^T$$

$$B_r = LT_2^{-1}B_c$$

$$C_r = C_cT_2L^T.$$

Apêndice B

Dados para o problema do Boeing

Neste apêndice encontram-se as matrizes que descrevem o problema do capítulo 6. Como trata-se de um problema LQG, a nomenclatura das matrizes apresentadas segue a notação do capítulo 1. A figura 6.1 também poderá servir de auxílio. Uma nota importante é que com relação a [10] estas matrizes foram redimensionadas visando reduzir seus números de condição. Foram aplicadas mudanças de coordenadas nos estados, nas entradas e nas saídas.

Matrizes de ponderação do LQG

$$Q = 10^{20} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000376 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.45 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 364.7 & 0 \\ 0 & 14.59 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 2.8224 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2742 & 0 \\ 0 & 0 & 6.884 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.0685 & 0 \\ 0 & 0.000373 \end{bmatrix}$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Matriz A (columnas de 45 a 55)

0	-0.19238	0.05269	-0.32568	-0.69778	1.12687	-2.37031	0	-0.00617	0	0
0	-0.26025	0.05622	-0.38281	-1.08496	-0.16775	-0.78581	0	0.00347	0	0
0	0.01433	3.4e-5	-2.63e-4	0.014526	7.6e-5	-2.90e-4	0	2.6e-5	0	0
0	-0.01223	8.1e-5	-4.93e-4	-0.01293	1.61e-4	-4.62e-4	0	3.9e-5	0	0
0	0.10508	-0.01681	0.09706	-0.57344	-0.35485	0.15396	0	0.00167	0	0
0	-0.12852	0.02892	-0.16469	0.76563	0.6725	-0.04956	0	-0.00637	0	0
0	0.95078	-0.22937	1.44445	1.36797	-1.082	2.84775	0	0.00313	0	0
0	-0.12116	0.01994	-0.08018	0.07512	0.637	-0.72057	0	-0.00491	0	0
0	-0.87266	0.28844	-1.64621	-0.13336	3.2125	-6.13387	0	-0.01656	0	0
0	1.39844	-0.2345	1.40373	-0.86992	0.9495	-1.899	0	0.00758	0	0
0	-0.33833	0.00108	-0.00777	-0.24585	-7.88e-3	0.00401	0	-0.00133	0	0
0	0.36645	-0.00613	0.03968	0.32568	-0.01656	0.0455	0	0.00101	0	0
0	-2.11885	0.48016	-3.13965	-1.78320	0.31712	-1.99531	0	0.00586	0	0
0	1.94980	-0.41844	2.73682	1.40674	-1.67312	3.96875	0	0.00692	0	0
0	-0.27939	0.10266	-0.59228	-0.52734	3.03062	-5.8	0	-0.01406	0	0
0	0.64287	-0.15094	0.93774	-1.896	-0.80812	0.16914	0	0.01408	0	0
0	-0.86406	-0.38375	1.20019	-3.21880	-1.2825	1.26168	0	0.00483	0	0
0	2.46914	-0.84906	2.00098	-2.04102	-3.8975	4.03675	0	0.00841	0	0
0	5.45469	-0.53875	0.35011	1.09766	-6.37	6.7	0	0.02204	0	0
0	0.93047	-0.6275	3.52051	1.76289	-0.40575	4.84844	0	-0.00614	0	0
0	-0.23727	0.164	-2.35937	4.41016	2.1995	-3.405	0	-0.00174	0	0
0	0.42406	0.03618	2.33203	-4.91406	-3.4965	3.66212	0	0.02358	0	0
0	-0.41180	-2.25062	6	-4.94922	3.7915	-0.82032	0	-0.00572	0	0
0	2.07656	0.23825	-0.72463	-0.19184	-2.1735	-1.06211	0	0.01349	0	0
0	2.47471	-0.28477	1.10205	2.12891	-8.20625	13.11562	0	0.01452	0	0
0	0.63848	-0.22312	0.791992	1.85059	5.66937	-5.46094	0	-0.03	0	0
0	8.2125	-0.92889	3.69043	2.44238	-2.17375	3.47812	0	0.01785	0	0
0	0.04113	-0.61734	2.47852	-0.48937	-2.34375	4.35937	0	-0.00108	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-0.15637	0	0
0	0.77672	0.84812	-0.42912	3.23594	6.45	-4.62087	0	-0.00786	0	0
0	0.60094	0.6625	-1.79771	3.16406	9.535	-10.1265	0	-0.00707	0	0
0	4.17012	-0.94297	4.73633	-1.50244	2.24375	-3.85469	0	-0.00311	0	0
0	-0.75178	0.10984	-0.68262	-0.01701	-0.241	0.30953	0	0.00038	0	0
0	-0.02820	-0.00737	0.05818	-0.73193	0.06099	-0.65536	0	-0.01166	0	0
0	-0.21846	0.06605	-0.38208	-3.21191	3.09375	-7.78126	0	-0.02126	0	0
0	-6.61797	2.95094	-11.1719	-0.11893	0.05552	-0.74719	0	-0.00876	0	0
0	-4.88789	2.12562	-6.66113	-0.06736	0.11597	-0.62257	0	0.00120	0	0

Matrizes B , B_N e C^T

0	0	0	0	0	0.2831808	2.29888
0	0	0	0	0	0.2777792	-0.79744
0	0	0	0	0	1.2726528	-0.1364992
0	0	0	0	0	1.1662336	-0.1448704
0	0	0	0	0	-0.0033049	-0.0077312
0	0	0	0	0	0.0083361	0.102
0	0	0	0	0	0.0028998	-0.0858
0	0	0	0	0	-0.026954	0.027288
0	0	0	0	0	-0.145888	0.27104
0	0	0	0	0	0.0165256	0.136
0	0	0	0	0	3.377664	-0.035328
0	0	0	0	0	-4.057344	-0.2253568
0	0	0	0	0	-0.432992	0.34976
0	0	0	0	0	-0.0559091	-0.103296
0	0	0	0	0	-0.6279616	3.53182
0	0	0	0	0	0.1991616	1.9264
0	0	0	0	0	-0.0919664	-0.078048
0	0	0	0	0	0.5086	0.22976
0	0	0	0	0	-0.924	1.00064
0	0	0	0	0	1.136	0.88288
0	0	0	0	0	-0.0774744	-1.1104
0	0	0	0	0	0.0239472	-0.8352
0	0	0	0	0	0.432112	0.054648
0	0	0	0	0	-0.38096	-0.09424
0	0	0	0	0	-0.0266432	-3.52256
0	0	0	0	0	-1.382976	-1.96224
0	0	0	0	0	-0.337312	0.044864
0	0	0	0	0	-0.1020256	-0.97056
0	0	0	0	0	-0.018062	0.004869
0	0	0	0	0	-0.221712	-0.59424
0	0	0	0	0	-0.194888	0.59312
0	0	0	0	0	0.179136	1.0432
0	0	0	0	0	-10.61888	1.99552
0	0	0	0	0	0.0818872	0.558592
0	0	0	0	0	-0.1328768	-4.76992
0	0	0	0	0	-0.200736	0.02336
0	0	0	0	0	-0.070976	-0.053344
0	0	0	0	0	-0.0081176	-0.058936
0	0	0	0	0	0.122744	-0.008256
0	0	0	0	0	0.0351296	0.045872
0	0	0	0	0	-0.0470176	0.105328
0	0	0	0	0	0.0262052	-0.005444
0	0	0	0	0	0.0247262	0.0054
0	0	0	0	0	0.0019995	0.01071
0	0	0	0	0	0.0008967	-0.02591
0	0	0	0	0	0	0.0003033
0	0	0	0	0	0	-0.003966
5120	0	0	51.2	0	0	0.0124867
0	0	0	0	0	0	-0.8005625
0	0	0	0	0	0	-0.6696
0	800	0	0	8	0	0.2213
0	0	594.08	0	0	0	0
0	0	996	0	0	0	0.000235
0	0	0	0.4	0	0	0
0	0	0	0	0.4	0	0

Matriz C_P^T

-1794560	-6.474e+10	-2.299e+09	-6451.2	5.514e+09	-2.358e+09	0	0	0	0
-1210880	-5.897e+10	-1.171e+09	-36019.2	-3.691e+08	8.698e+08	0	0	0	0
1406464	5.058e+11	3.697e+08	569856	2.934e+09	1.399e+09	0	0	0	0
1644544	5.516e+11	6.848e+08	633088	3.108e+09	1.551e+09	0	0	0	0
120960	1.119e+10	1.339e+08	4506.4	-69600000	5733600	0	0	0	0
75088	1.416e+10	63912000	14072	2.890e+08	-1.231e+08	0	0	0	0
63960	-1.194e+09	1.389e+08	2674	-1.211e+08	1.020e+08	0	0	0	0
28180	-1.537e+09	45956000	-452.4	43360000	-23992000	0	0	0	0
-94400	-1.382e+10	28224000	-14264	6.690e+08	1.648e+08	0	0	0	0
-23888	1.051e+09	73360000	-3458.4	4.448e+08	1.442e+08	0	0	0	0
2631680	8.428e+11	9.853e+08	947456	4.954e+09	2.012e+09	0	0	0	0
2606080	8.657e+11	9.792e+08	991232	5.509e+09	2.333e+09	0	0	0	0
39692.8	-6.925e+09	-2.156e+08	-28179.2	5.313e+08	-5.758e+08	0	0	0	0
-126720	1.969e+10	-6.671e+08	-19372.8	-5.647e+08	-3.459e+08	0	0	0	0
-1306240	-2.488e+11	-3.048e+08	-175488	7.395e+09	-9.133e+08	0	0	0	0
-1078400	-2.336e+11	-66112000	-152064	6.180e+09	-1.050e+09	0	0	0	0
60912	-1.126e+10	-14132.8	-21520	1.057e+08	-1.109e+08	0	0	0	0
27296	1.789e+10	73904000	4254.4	3.274e+08	5.448e+08	0	0	0	0
380000	1.280e+10	55168000	-79680	1.345e+09	3.128e+08	0	0	0	0
405280	1.656e+10	20848000	-77280	1.193e+09	84928000	0	0	0	0
6239.2	-4.614e+10	-1.303e+08	-30016	-4.810e+08	-99120000	0	0	0	0
78096	-4.682e+10	7339200	-29240	-4.579e+08	-1.369e+08	0	0	0	0
-23320	-7.742e+09	-52160000	3160.8	-2.490e+08	-4.270e+08	0	0	0	0
4607.2	-1.406e+10	-35360000	-3950.4	-2.374e+08	-4.740e+08	0	0	0	0
-213248	-2.647e+10	8.930e+08	40608	8.234e+08	3.982e+09	0	0	0	0
-44876.8	-3.155e+09	6.998e+08	35065.6	3.732e+08	4.995e+09	0	0	0	0
-331200	4.886e+08	-4.151e+08	82816	-2.120e+09	-2.681e+09	0	0	0	0
-446720	-7.651e+09	72480000	111168	-1.774e+09	-6.816e+08	0	0	0	0
-15900	-5.401e+09	-6697000	-6223	-29870000	-20520000	0	0	0	0
-260800	1.125e+10	-5.317e+08	-8552	1.921e+08	6.739e+08	0	0	0	0
229600	-1.456e+10	4.784e+08	8040	-2.574e+08	-6.426e+08	0	0	0	0
94144	-2.700e+10	-3.039e+08	-106624	1.812e+09	1.021e+08	0	0	0	0
-716160	-1.035e+11	-2.256e+09	-181376	2.056e+09	-6.483e+09	0	0	0	0
600896	2.690e+11	-3.935e+08	357376	4.840e+09	-2.799e+09	0	0	0	0
1300480	2.151e+11	1.593e+09	183872	-7.790e+09	6.216e+09	0	0	0	0
-1902.4	1.501e+08	2201600	445.44	1507520	-1846400	0	0	0	0
1952	-8.485e+08	-25520000	-2556.8	-4369600	-1247360	0	0	0	0
1231.2	-3.391e+08	-23296000	-2047.2	43200	1608800	0	0	0	0
688.08	-64376000	-1628800	-240.24	-61912	2011200	0	0	0	0
5155.2	9.288e+08	38928000	2849.6	2366400	9096000	0	0	0	0
10265.6	1.068e+09	50144000	3304	880960	-32464000	0	0	0	0
242.08	-8236000	-682400	-77.64	-105280	64520	0	0	0	0
-225.88	11760000	809600	87.32	104400	59720	0	0	0	0
-9782	-3.252e+09	-14519000	-3576	11840000	-74540000	0	0	0	0
-138.4	-1.345e+08	-691200	-125.8	-385500	-4712000	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.00625	0	0
0	0	0	0	0	0	0.5	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.03125
0	0	0	0	0	0	0	0	4	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Matrizes F^T e L

-0.0101243	-0.1940029	0.2773907	35.527535
0.0150925	-0.1706072	0.5148222	0.4690837
-0.0291571	-0.1052055	0.0027286	0.0915859
-0.0468736	-0.2004161	0.0216398	0.0931453
0.0003309	-0.0011666	-0.8569595	-28.407595
-0.0003898	0.0068335	-0.0833777	23.521081
-0.0010694	0.0050168	-0.0963991	-23.124178
-0.0007022	-0.0018710	-0.2688161	11.459486
0.0000732	-0.0000113	-0.1341101	34.970363
0.0001838	0.0005368	0.9674333	26.224368
-0.0563136	-0.2436809	0.7251265	0.2996535
0.0117467	-0.0919589	-0.3566663	-4.6256447
0.0001089	-0.0040066	0.3843066	-4.774992
0.0028061	-0.0241694	0.0039321	-42.132731
0.0051414	0.0058993	0.5145893	73.853266
0.0016069	-0.0418422	1.071506	1.9789153
0.0001025	-0.0007438	0.1168539	11.122292
-0.0001564	0.0046042	-0.0082003	-19.629181
0.0000395	0.0025899	-0.4350187	-41.75158
-0.0001896	0.0028329	0.6044266	-46.096766
0.0000291	-0.0019935	0.1106115	26.378261
-0.0000589	-0.0007096	-0.0075982	12.217995
0.0001153	-0.0025527	0.3806638	19.467388
0.0000649	-0.0020123	0.0540589	7.352054
0.0018704	0.0074641	-0.4315270	-81.808578
-0.0004738	0.0638795	0.1016147	9.981394
-0.0006420	-0.0087600	0.5500040	-35.934785
-0.0000607	-0.0251111	1.1219092	-28.432417
0.0000506	0.0009135	30.94221	402.42268
0.0001194	0.0050112	0.0172237	-3.4330968
-0.0002351	-0.0040030	-0.0395641	15.503175
-0.0004053	0.0036329	1.0434176	19.682961
-0.0015121	-0.0096523	-0.1261502	-0.9737649
0.0045879	-0.0985739	-1.2146245	10.560874
-0.0006704	-0.0657976	1.2874035	68.052089
3.730e-07	0.0000019	0.0537035	0.6909794
-0.0000011	0.0000053	-0.0138055	5.7891864
-1.016e-07	0.0000029	0.0551829	-12.241853
-3.214e-09	-0.0000028	0.1023702	6.4882177
-0.0000065	-0.0000957	-0.1837319	-13.506813
0.0000047	-0.0001043	0.0376373	0.7703321
-3.624e-09	1.116e-08	-0.0516219	-2.3416162
2.189e-09	-2.163e-08	0.0470226	0.0987562
-0.0000040	0.0003879	77.644701	3829.262
-1.588e-09	3.794e-08	23.322982	1591.7059
0.0025827	0.0039476	1.4216497	-0.6625677
0.0034221	0.0036222	0.2285221	-2.5945505
0.0010080	0.0010934	0.0243586	8.3055537
0.0006584	0.0425094	-1.1354466	40.972605
0.0011040	0.0849369	-0.2469649	-139.96848
0.0002800	0.0205456	0.1780361	40.61579
-0.0000050	-0.0000139	-730.98722	-41650.756
-0.0000135	-0.0001756	-1079.2526	-67088.936
-0.0885250	-0.0687688	-0.0157893	0.0014799
-0.0048159	-0.2082028	-0.1550808	-15.159396

Bibliografia

- [1] U. M. Al-Saggaf and G. F. Franklin. Model reduction via balanced realizations: an extension and frequency weighting techniques. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-33(7):687–692, July 1988.
- [2] B. D. O. Anderson. Weighted Hankel-norm approximation: calculation of bounds. *Syst. Contr. Lett.*, 7:247–255, July 1986.
- [3] B. D. O. Anderson and Y. Liu. Controller reduction: concepts and approaches. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-34(8):802–812, Aug. 1989.
- [4] B. D. O. Anderson and J. B. Moore. *Optimal control: linear quadratic methods*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1989.
- [5] R. H. Bartels and G. W. Stewart. Solution of the matrix equation $AX + XB = C$. *Communications of the ACM*, 15(9):820–826, Sept. 1972.
- [6] M. Bettayeb and D. Kavranoglu. Performance evaluation of a new \mathcal{H}_∞ norm model reduction scheme. In *Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control*, pages 2913–2914, San Antonio, Texas, Dec. 1993.
- [7] J. C. Chen and B. C. Chang. \mathcal{H}_∞ controller reduction with closed-loop stability considerations. In *Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control*, pages 2923–2924, San Antonio, Texas, Dec. 1993.

- [8] E. G. Collins, Jr., W. M. Haddad, and S. S. Ying. Construction of low authority, nearly non-minimal LQG compensators for reduced-order control design. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 3411–3415, Maryland, June 1994.
- [9] R. L. Dailey. Workshop on \mathcal{H}_∞ and μ methods for robust control. Lecture notes, IEEE Conference on Decision and Control, Brighton, England, 1991.
- [10] E. J. Davidson. Benchmark problems for control system design. Report, IFAC Theory Committee, 1990.
- [11] J. A. Davis and R. E. Skelton. Another balanced controller reduction algorithm. *Syst. Contr. Lett.*, 4:79–83, Apr. 1984.
- [12] E. R. De Pieri and A. Hentz. Model and controller reduction methods via balanced realizations. In *Electro 95 – XI Congreso Chileno de Ingenieria Electrica*, pages A104–A109, Punta Arenas, Nov. 1995.
- [13] C. de Villemagne and R. E. Skelton. Controller reduction using canonical interactions. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-33(8):740–750, Aug. 1988.
- [14] V. V. Dombrovskii. Dimension reduction of multivariate linear systems under \mathcal{H}_∞ constraints. *Avtomatika i Telemekhanika*, pages 123–132, Apr. 1994.
- [15] J. C. Doyle and G. Stein. Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-26:4–16, 1981.
- [16] D. F. Enns. *Model Reduction for Control System Design*. PhD thesis, Stanford University, 1984.
- [17] K. Glover. All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞ -error bounds. *Int. J. Contr.*, 39(6):1115–1193, 1984.

- [18] P. J. Goddard and K. Glover. Controller reduction: weights for stability and performance preservation. In *Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control*, pages 2903–2908, San Antonio, Texas, Dec. 1993.
- [19] G. H. Golub and C. F. V. Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, second edition, 1990.
- [20] G. Gu. Model reduction with relative/multiplicative error bounds and relations to controller reduction. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-40(8):1478–1485, Aug. 1995.
- [21] A. Hentz and E. R. De Pieri. Uma abordagem algorítmica de métodos para redução de modelos e controladores. In *Congresso Brasileiro de Automática*, Brasil, Sept. 1996. Submetido para publicação.
- [22] E. A. Jonckheere and L. M. Silverman. A new set of invariants for linear systems – application to reduced order compensator design. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-28(10):953–964, Oct. 1983.
- [23] G. J. Lastman and N. K. Sinha. A comparison of the balanced matrix method and the aggregation method of model reduction. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-30(3):301–304, Mar. 1985.
- [24] G. A. Latham and B. D. O. Anderson. Frequency-weighted optimal Hankel-norm approximation of stable transfer functions. *Syst. Contr. Lett.*, 5:229–236, Feb. 1985.
- [25] A. J. Laub, M. T. Heath, C. C. Paige, and R. C. Ward. Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-32(2):115–122, Feb. 1987.

- [26] Y. Liu and B. D. O. Anderson. Controller reduction via stable factorization and balancing. *Int. J. Contr.*, 44(2):507–531, 1986.
- [27] Y. Liu and B. D. O. Anderson. Singular perturbation approximation of balanced systems. *Int. J. Contr.*, 50(4):1379–1405, 1989.
- [28] Y. Liu, B. D. O. Anderson, and U.-L. Ly. Coprime factorization controller reduction with Bezout Identity induced frequency weighting. *Automatica*, 26(2):233–249, 1990.
- [29] B. C. Moore. Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-26(1):17–32, Feb. 1981.
- [30] D. Mustafa and K. Glover. Controller reduction by \mathcal{H}_∞ -balanced truncation. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-36(6):668–682, June 1991.
- [31] C. N. Nett, C. A. Jacobson, and M. J. Balas. A connection between state-space and doubly coprime fractional representations. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-29(9):831–832, Sept. 1984.
- [32] R. E. O'Malley, Jr. and L. R. Anderson. Singular perturbations, order reduction, and decoupling of large scale systems. In Henker and Miller, editors, *Numerical Analysis of Singular Perturbation Problems*, pages 317–337. Academic Press, London, 1979. Proceeding of the conference held at the University of Nijmegen, The Netherlands, 1978.
- [33] L. Pernebo and L. M. Silverman. Model reduction via balanced state space representations. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-27(2):382–387, Apr. 1982.

- [34] M. G. Safonov and R. Y. Chiang. A schur method for balanced-truncation model reduction. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-34(7):729-733, July 1989.
- [35] V. R. Saksena, J. O'Reilly, and P. V. Kokotovic. Singular perturbations and time-scale methods in control theory: survey 1976-1983. *Automatica*, 20(3):273-293, 1984.
- [36] S. Shokoochi, L. M. Silverman, and P. M. Van Dooren. Linear time-variable systems: balancing and model reduction. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-28(8):810-822, Aug. 1983.
- [37] R. E. Skelton. Cost decomposition of linear systems with applications to model reduction. *Int. J. Contr.*, 32(6):1031-1055, 1980.
- [38] R. E. Skelton and A. Yousuff. Component cost analysis of large scale systems. *Int. J. Contr.*, 37(2):285-304, 1983.
- [39] K. Vicenza Fernando and H. Nicholson. Singular perturbational model reduction of balanced systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-27(2):466-468, Apr. 1982.
- [40] M. Vidyasagar. *Control system synthesis: a factorization approach*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1985.
- [41] W. Wang, J. Doyle, C. Beck, and K. Glover. Model reduction of LFT systems. In *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, pages 1233-1238, Brighton, England, Dec. 1991.
- [42] J. H. Wilkinson. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Clarendon Press, Oxford, forth edition, 1972.
- [43] A. Yousuff and R. E. Skelton. Controller reduction by component cost analysis. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-29(6):520-530, June 1984.

- [44] A. Yousuff and R. E. Skelton. A note on balanced controller reduction. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-29(3):254-256, Mar. 1984.
- [45] K. Zhou. Error bounds for frequency weighted balanced truncation and relative error model reduction. In *Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control*, pages 3347-3352, San Antonio, Texas, Dec. 1993.
- [46] K. Zhou. Frequency-weighted model reduction with \mathcal{L}_∞ error bounds. *Syst. Contr. Lett.*, 21:115-125, 1993.
- [47] K. Zhou. Weighted optimal Hankel norm model reduction. In *Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control*, pages 3353-3354, San Antonio, Texas, Dec. 1993.
- [48] K. Zhou. Frequency-weighted \mathcal{L}_∞ norm and optimal Hankel norm model reduction. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-40(10):1687-1699, Oct. 1995.